ANHANG

Mathematische Bezeichnungen

Dieser Anhang erklärt einige mathematische Begriffe und Bezeichnungen, die in diesem Band verwendet und für Praktiker u. U. unbekannt sind.

1. Allgemeines: Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ zwei Eigenschaften (Behauptungen, Aussagen o. ä.), so bedeutet

$\mathfrak{E} \Rightarrow \mathfrak{F}$: Aus $\mathfrak{E}$ folgt $\mathfrak{F}$; wenn $\mathfrak{E}$ gilt, so auch $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{E} \Leftrightarrow \mathfrak{F}$: Die Eigenschaften $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ sind äquivalent (d.h. $\mathfrak{E} \Rightarrow \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{E}$).

Bei Definitionen wird das Zeichen $:=$ verwendet; so bedeutet $a := b + c$ (oder auch: $b + c =: a$), daß die Größe a durch die Summe $b + c$ definiert ist.

2. Mengenalgebra: Sind $x, y, u, v, \ldots$ irgendwelche Objekte (Punkte, Zahlen, Personen o. ä.), so bezeichnet $\{x, y, u, v, \ldots\}$ die Menge dieser Objekte; $x, y, \ldots$ heißen die Elemente von $\{x, y, u, v, \ldots\}$. $\emptyset$ ist die leere Menge, die kein einziges Element enthält. Sind allgemein $A, B, \ldots$ Teilmengen einer Menge S, so bedeutet:

$x \in A$	x ist Element von A
$x \notin A$	x ist nicht Element von A
$A \subset B$	A ist in B enthalten und $A \neq B$.
$A \subseteq B$	A ist in B enthalten (z. B. $A = B$)
$A \cap B$	*Durchschnitt* von A und B (= Menge der $x \in S$, die sowohl zu A als auch zu B gehören)
A und B disjunkt	$A \cap B = \emptyset$ (A und B besitzen kein gemeinsames Element)
$A \cup B$	*Vereinigung* von A und B (= Menge der x, die mindestens zu einer der beiden Mengen A und B gehören)
$A + B$	Vereinigung von A und B, wobei aber A und B als disjunkt vorausgesetzt seien
$\{x \mid x \text{ erfüllt } \mathfrak{E}\}$	Menge der x, die eine (gegebene) Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen.

$\bar{A} := S - A = \{x \mid x \in S, x \notin A\}$	Menge der $x \in S$, die nicht zu A gehören (*Komplement* von A)
$A - B = A \cap \bar{B}$	Menge der $x \in A$, die nicht in B liegen
$(A - B) + (B - A)$	Menge der $x \in S$, die zu *genau* einer der Mengen A, B gehören (*symmetrische Differenz*)
$\lvert A \rvert$	die Anzahl der Elemente in A
$\mathfrak{P}(A)$	die Menge aller Teilmengen von A; besitzt A endlich viele (etwa: N) Elemente, so gibt es genau 2^N solcher Teilmengen (darunter A und $\emptyset$)
$A \times B$	Die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ (*kartesisches Produkt* von A und B)

3. Reelle Zahlen: Wir bezeichnen mit

R	die Menge aller reellen Zahlen x $(-\infty < x < \infty)$
$\underset{i=1,\ldots,m}{\operatorname{Max}} \{a_i\}$	das Maximum der Zahlen $a_1, \ldots, a_m \in R$ (entsprechend das Minimum)
$\operatorname{Max} \{x \mid x \text{ erfüllt } \mathfrak{E}\}$	das Maximum aller Zahlen x, welche die (gegebene) Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen.
$\lvert a \rvert$	den Betrag der Zahl $a \in R$ $(= \operatorname{Max} \{a, -a\})$
$[a, b)$	die Menge aller Zahlen $x \in R$ mit $a \leqslant x < b$ (halboffenes Intervall); entsprechend $[a, b]$.
$a \gg b$	a/b ist „sehr groß“.
$a \to b$	die Zahl a strebt gegen die Zahl b (z.B. $a \to \infty$).
$a \approx b$	die Zahl a ist ungefähr gleich b (d.h.: $\lvert a - b \rvert$ klein)
$a_n \sim b_n$	der Quotient a_n/b_n strebt bei $n \to \infty$ gegen 1.
$a_n \propto b_n$	a_n ist proportional zu b_n (für alle $n = 1, 2, \ldots$)
$a_n \sim b_n$	a_n ist (für große n) ungefähr proportional zu b_n (d.h. $a_n \sim c \cdot b_n$ mit einer Zahl $c \in R$).
$f(x) \to \underset{x \in T}{\operatorname{Min}}$	bedeutet: Die Funktion $f(x)$ ist bzgl. aller x (aus der Menge T) zu minimieren.
$a_n = O(b_n)$	Für $n \to \infty$ ist $\lvert a_n/b_n \rvert$ durch eine Konstante beschränkt.
$a_n = o(b_n)$	Für $n \to \infty$ strebt $\lvert a_n/b_n \rvert$ gegen 0.
$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$	Binomialkoeffizient $(N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N)$

4. Vektoren und Matrizen: Ein p-dimensionaler Vektor x ist ein p-Tupel reeller Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, das wir in Spaltenform schreiben:

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$R^p = R \times \ldots \times R$ bezeichnet die Menge aller p-dimensionalen Vektoren x. Eine $m \times p$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist ein Schema mit $m \cdot p$ reellen Zahlen a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

Es bedeutet für $x, y \in R^p$, $b \in R^m$:

A'	die $p \times m$-Matrix, bei der die Spalten und Zeilen von A vertauscht sind (*Transponierte* von A)
x'	den Zeilenvektor $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$
$Ax + b$	den m-dimensionalen Vektor mit Komponenten $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, \xi_j + b_i$ $(i = 1, \ldots, m$; *Lineartransformation*).
$\lVert x \rVert = \left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 \right)^{1/2}$	die *Norm* des Vektors x ($\lVert x \rVert = 0$ genau für $x = 0$)

$x'y = (x, y) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i\ \eta_i$ das *skalare* (*innere*) Produkt der Vektoren $x, y \in R^p$.

p Vektoren $y_1, \ldots, y_p \in R^p$ heißen *orthogonal*, wenn $y_i'y_j = 0$ für $i \neq j$ gilt, und *orthonormiert*, wenn zusätzlich $\lVert y_i \rVert = 1$ ist $(i = 1, \ldots, p)$. Bei einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ $(m = p)$ bedeutet:

$x'Ax = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, \xi_i \xi_j$	quadratische Form
$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$	die *Spur* von A
$\det(A) = \lvert A \rvert$	die *Determinante* von A; A heißt *singulär*, wenn $\lvert A \rvert = 0$, und *regulär* für $\lvert A \rvert \neq 0$.

$A > 0$	A ist *positiv definit* (d.h. $x'Ax > 0$ für alle $x \in R^p$, $x \neq 0$).
$\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$	die $p \times p$-Matrix, die in der Hauptdiagonale die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ und sonst nur Nullen besitzt (*Diagonalmatrix*).
$I_p := \mathrm{diag}\,(1, \overset{(p)}{\ldots}, 1)$	die $p \times p$-Einheitsmatrix.

6. *Wahrscheinlichkeitsrechnung:* Zufällige Vektoren werden mit Großbuchstaben bezeichnet, z.B. durch $X = (X_1, \ldots, X_p)'$ mit den p zufälligen Komponenten $X_1, \ldots, X_p$. Im eindimensionalen Fall ($p = 1$) heißt X auch eine Zufallsgröße. Bedeutet p die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, so schreiben wir oft $X \sim P$. Man spricht von einer *diskreten* Verteilung, wenn X nur eine endliche oder unendliche Folge von Werten (Vektoren) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ annehmen kann ($p_i \geqslant 0$, $\Sigma p_i = 1$).
Eine *kontinuierliche* Verteilung mit der (Verteilungs-)Dichte $f(x)$ liegt vor, falls die Wahrscheinlichkeit $P(X \in A)$ dafür, daß X in einer Menge A des R^p liegt, durch das Integral:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

gegeben wird ($f(x) \geqslant 0$, $\displaystyle\int_{R^p} f(x)\,dx = 1$).

Ist $h(x) = h(x_1, \ldots, x_p)$ eine Funktion von $x \in R^p$ und $Y = h(X) = h(X_1, \ldots, X_p)$ ein aus X berechneter Zufallsvektor, so heißt

$$E[Y] = E[h(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) \cdot p_i & \text{im diskreten Fall} \\ \displaystyle\int_{R^p} h(\xi) \cdot f(\xi)\,d\xi = & \text{im kontinuierlichen Fall} \end{cases}$$

der *Erwartungswert von* Y (speziell für $h(x) = x$: *von* X). Für p Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_p$ bedeutet

$$\sigma_{ii} := \sigma_i^2 := \mathrm{Var}(X_i) := E[\,(X_i - E[X_i])^2] = E[X_i^2] - E[X_i]^2$$

die *Varianz* von X_i, weiterhin

$\mathrm{Kov}(X_i, X_j) := E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = E[X_i \cdot X_j] - E[X_i] \cdot E[X_j]$

die *Kovarianz* von X_i und X_j und

$$\mathrm{Kov}(X, X) = (\sigma_{ij})$$

die $p \times p$-Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_p)'$. Es heißt $\sigma_{ij} \,/\, \sigma_i \sigma_j$ die *Korrelation* von X_i und X_j.

Beispiel: Ist $\mu \in R^p$ ein beliebiger Vektor, ferner Σ eine beliebige, symmetrische und positiv definite $p \times p$-Matrix und wird die Verteilungsdichte von $X = (X_1, \ldots, X_p)'$ durch

$$f(x) := \varphi(x;\, \mu,\, \Sigma) := (2\pi)^{-p/2} \cdot |\Sigma|^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\,\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

($x \in R^p$) gegeben, so besitzt X definitionsgemäß eine p-dimensionale *Normalverteilung;* in Zeichen: $X \sim \mathfrak{N}(\mu, \Sigma)$. Es ist dann $E[X] = \mu$ und $\mathrm{Kov}(X, X) = \Sigma$. Für $p = 1$ ergibt sich speziell die eindimensionale Normalverteilung mit der Dichte:

$$f(x) := \varphi(x; \mu, \sigma^2) := (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} \qquad x \in R$$

und $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Wichtige kontinuierliche, eindimensionale Verteilungen sind die χ^2-Verteilung, die Γ-Verteilung und die F-Verteilung (vgl. MORGENSTERN 1968; FISZ 1970).