

Formes d'aptitude et taxinomie d'objectifs cognitifs en mathématiques

O - FICHE TECHNIQUE

A - Tableau d'incidence des données Attributs \times Individus de dimension 95×1621 (cf. chap. II § II.1, partie I).

B - Organisation des liens entre les attributs de description (qui ne représentent ici des tests mathématiques) à partir de la classification hiérarchique.

C - L'indice utilisé pour évaluer la proximité entre deux attributs descriptifs a et b, s'écrit

$$Q_p(a,b) = \left[\text{card}(E(a) \cap E(b)) - \frac{n(a)n(b)}{n} \right] / \sqrt{\frac{n(a)n(b)}{n}}$$

où ici $E(a)$ (resp. $E(b)$) est l'ensemble des sujets ayant réussi l'item a (resp. b) (cf. chap. 2 § IV.1, partie I).

La réduction globale des similarités est ici faite au moyen du paramètre λ (cf. chap. 2, fin § IV.5 et C de I.O).

D - Algorithme de la Vraisemblance des Liens (A.V.L.) (chaîne de programmes ORDON-POLON-ARBRE) pour la classification de l'ensemble des 95 attributs.

E - Recherche sur la détermination des principaux objectifs cognitifs et leur ordonnancement d'après le comportement d'enfants de classes de 4^e et 3^e des collèges d'enseignement secondaire. Confrontation de cette classification avec une taxinomie élaborée par R. Gras et conforme à la théorie de développement de Piaget et Bruner.

F - I.C. LERMAN d'après les travaux de R. GRAS.

G - R. GRAS.

La suite des titres des sous paragraphes est

- 1 - Introduction.
- 2 - La taxinomie en objectis cognitifs.
- 3 - Les données.
- 4 - L'interprétation des résultats.
- 5 - Conclusion.
- 6 - Développements : "les graphes d'implication".

Ce texte est paru dans la Revue Française de Pédagogie (n° 44, 1978), à l'exception du dernier paragraphe qui le complète.

1. INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une recherche qu'a conduite R. GRAS (I.R.E.M. de Rennes) sur le comportement en mathématiques des enfants d'un cycle donné d'études ; il s'agit en l'occurrence des classes de quatrième et troisième des C.E.S. (collège d'enseignement secondaire). Un des aspects les plus décisifs de cette recherche consiste en la détermination des principaux objectifs cognitifs et en leur ordonnancement à partir du comportement réel des enfants. Une telle taxinomie qui permettrait de préciser les différentes étapes dans l'appropriation d'un concept mathématique donné, fournira à l'enseignant une liste d'objectifs à atteindre dans sa fonction pédagogique ainsi qu'une grille d'évaluation de son propre enseignement.

Nous allons ici confronter deux classifications. La première, en objectifs cognitifs, telle qu'elle a été précisée par R. Gras s'appuyant sur les théories du développement cognitif de Piaget et de Bruner. La seconde, obtenue par l'application de l'algorithme de la vraisemblance du lien (cf. chap. 5, § III, partie D) sur un ensemble d'items, dont chacun est défini par un test mathématique, proposés à un échantillon d'élèves. La comparaison des deux classifications supposera la reconnaissance derrière un même test de l'objectif cognitif dans lequel il s'insère.

Terminons cette introduction en précisant que notre texte ne fait que reprendre certains aspects de ceux (4), (5) et (8) cités en références.

2. LA TAXINOMIE EN OBJECTIFS COGNITIFS

Bloom estime qu'il existe deux grandes classes dans l'ensemble des objectifs cognitifs. La première relève de la *connaissance* et peut être considérée comme le reflet direct de l'apprentissage qui reste, dans une certaine mesure, extérieur au sujet. La seconde qui décrit les *habiletés et capacités intellectuelles* de ce dernier, traduit la *compréhension* ; c'est-à-dire, l'intégration personnelle des objets et l'aptitude à leur réinvestissement dans les actions du sujet. La "complexité des comportements" dont parle Bloom serait ainsi ordonnée de la complexité cognitive à la complexité opératoire. Toutefois, il serait hasardeux de cataloguer une tâche exécutée par un enfant dans l'une ou l'autre classe ; en effet, un exercice dit de connaissance peut exiger la "reconnaissance" d'une structure et nécessiter de hautes qualités analytiques pour un âge et un apprentissage donnés. D'autre part, la connaissance d'objets et de faits mathématiques risque d'être et de demeurer pour certains élèves du seul domaine sensible et orienté vers l'utilité : un cercle est une figure qui peut être tracée au moyen d'un compas ; un pantographe est fait pour reporter, agrandir ou diminuer des figures ; une table de la loi normale est faite pour savoir si une mesure n'est pas trop invraisemblablement grande ou petite, etc. L'aptitude à utiliser à bon escient un objet ou un fait mathématique relève-t-elle de l'une ou de l'autre des deux rubriques ?

Il faut donc compter avec un large éventail de classes d'objectifs dont les frontières n'ont d'ailleurs pas la netteté espérée. Comme le confirment certaines critiques de Y. Tourneur, la très riche classification bloomienne dont les classes sont ordonnées selon un critère de complexité cognitive croissante, est loin de rendre compte de la hiérarchie des résultats obtenus à un test dans n'importe quelle situation. Il serait présomptueux de prétendre qu'il puisse exister une taxinomie latente universelle, indépendante de la discipline considérée, du niveau d'enseignement, des méthodes d'apprentissage, de l'affectivité du maître et de l'élève et d'autres fac-

teurs encore...

Une première approche pourrait consister à estimer une hiérarchie des différents stades dans l'appropriation d'un concept déterminé par l'enfant. L'évolution de cette appropriation peut être révélée de façon externe par la réussite à des tâches relevant d'objectifs pédagogiques retenus dans une première classification. Les classifications de Bloom de l'"Indian National Council of Educational Research" (I.N.C.E.R.), de la "National Longitudinal Study of Mathematical Abilities" (N.L.S.M.A.), de l'"I.R.E.M." de Strasbourg sont assez exhaustives pour couvrir l'ensemble des objectifs que peut s'assigner raisonnablement tout professeur de mathématiques quel que soit le niveau de ses élèves ou étudiants. Il demeure ensuite la difficulté de formulation d'une hypothèse, de constitution de classes d'objectifs et d'un ordre sur ces classes, en cherchant bien entendu à ce qu'il soit, lui même, l'image d'un ordre sur un continuum de complexité. Il paraît alors légitime de retenir les éléments d'une théorie de développement, susceptible de sous-tendre l'appropriation conceptuelle. C'est ainsi que, dans une première approche, on utilisera celle de Piaget, interprétée par Bruner, selon trois niveaux :

- "enactive level" : observations et manipulations des objets par l'enfant ; appropriation physique. sensori-motrice ;
- "ikononic level" : représentation et traduction des objets en images ; appropriation graphique ;
- "symbolic level" : effectuation de transformations sur les symboles, étude des relations ; appropriation "intellectuelle" dite conceptuelle.

Une hypothèse naïve consiste alors à admettre que ces trois niveaux sont ordonnés par la complexité des démarches intellectuelles mises en jeu : du premier niveau où sont appréhendés des éléments simples, l'enfant passe au second par une transposition métalinguistique, puis au troisième où les connexions complexes entre les éléments symbolisés font place aux relations entre eux et aux structures sur leur classe.

Bien que, comme il a été remarqué ci-dessus, il soit parfois difficile d'attribuer l'un des précédents niveaux à une tâche mathématique donnée ; R. Gras rejoint cette théorie en proposant une échelle plus riche en cinq classes, qu'il s'agira alors d'éprouver. Les trois premières α , β et γ contiennent les principaux objectifs relevant d'un apprentissage à trois niveaux ; les deux dernières δ et η , ceux des objectifs relatifs aux "processus mentaux supérieurs". Reprenons ci-dessous les caractéristiques de la description de chacun des niveaux de R. Gras.

α . Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématique.

Les objectifs de cette catégorie décrivent des schèmes actifs permettant la connaissance sensible des objets et des faits mathématiques ; ceux-ci, dans la phase d'apprentissage correspondante, sont présentés sous forme matérielle d'objets réels, d'instruments de mesure ou sous forme matérialisée de ces objets (schémas, tableaux, notices, etc.). A ce niveau, l'élève doit pouvoir exprimer oralement son action et, de ce fait, doit posséder la terminologie adéquate. Cette expression lui permet d'ailleurs une première intériorisation des phénomènes. Enfin, il doit être capable d'user de faits et d'effectuer de simples algorithmes, qu'ils soient calculatoires ou manipulatoires.

β : Analyse des faits et transposition.

Les objectifs ont pour but ici de mesurer l'aptitude à maîtriser l'ac-

tion extérieure : les faits pertinents sont choisis, analysés et, dans une première démarche inductive, ils sont au besoin extrapolés. Des connexions sont établies entre les événements observables et mesurables. Enfin, à ce palier, l'enfant doit montrer qu'il est capable de traduire d'un langage à un autre : cette transposition qui se doit d'être fidèle et précise lui permet de recevoir ou de transmettre des communications de modes différents.

γ. Compréhension des relations et des structures.

La connaissance du concept s'intériorise complètement ; il prend place par mis les acquis antérieurs. On doit alors attendre ici que l'élève puisse déjà argumenter à son sujet : la compréhension des relations et des structures rompt l'isolement de l'objet mathématique saisi. L'élève peut d'ailleurs réinvestir ses nouvelles connaissances dans des situations simples où elles prennent, au début, une place privilégiée. Insistons sur la place de l'application dans la hiérarchie : elle est de degré supérieur à l'illustration évoquée en α et nécessite une très bonne compréhension conceptuelle.

δ. Synthèse et créativité.

On atteint ici les formes mentales supérieures. Il s'agit ici, non seulement de le reconnaître mais aussi d'intégrer le concept, non plus de le juxtaposer aux autres. Il doit permettre un enrichissement éventuel de la théorie dans laquelle il se place : l'enfant dégage de nouvelles propriétés de celle-ci, crée ses exemples personnels, découvre des généralisations, se rend capable de transferts enrichis dans d'autres disciplines.

η. Critique et évaluation.

C'est enfin le palier où une distance peut être prise par rapport à la réalité et à la théorie mathématique : les objectifs essentiels visent à critiquer les données, à séparer les propriétés, (nécessaires ou suffisantes), à construire des contre-exemples, à orienter éventuellement son action vers de nouveaux objets.

Comme il a été exprimé ci-dessus, il serait pertinent de tester l'existence et l'enchaînement de ces différentes classes d'objectifs cognitifs autour d'un même concept mathématique. Il s'agit en effet d'une expérience en cours où R. Gras a établi un ensemble de test relevant des différentes classes précédentes, autour du concept de la symétrie centrale (cf.[6]). On cherchera ici à confronter la précédente classification avec celle obtenue par notre méthode de construction d'un arbre condensé des classifications à partir de l'algorithme de la vraisemblance du lien, sur un large ensemble de tests recouvrant diverses notions mathématiques. Ces différents tests ont davantage été établis pour reconnaître les principaux types d'aptitude dans le comportement mathématique des enfants que dans le but de validation dont il est question ici. Cela suppose par conséquent la reconnaissance derrière un même item de la classe d'objectifs où il s'intègre le mieux.

3. LES DONNEES.

Dans le cadre d'une expérience nationale centrée sur les mathématiques dans les classes de quatrième et troisième de C.E.S. un test d'entrée dans les classes concernées a été proposé sous la responsabilité de R. Gras et avec l'aide de professeurs volontaires intéressés par l'expérience pédagogique. C'est ainsi que ce test, que nous présenterons bientôt, a été

soumis dans 63 classes de diverses académies de France, dès la première quinzaine de septembre 1975. Ces classes n'ont pas nécessairement été choisies selon les lois du sondage aléatoire. On y distingue deux principaux lots ; le premier formé de classes "expérimentales" (i.e. où une expérience pédagogique allait être conduite pendant deux ans) et le second, formé de classes "témoins". A ces deux lots on a adjoint quelques classes de S.E.S. (section d'enseignement spécialisé) à caractère très pratique ; auxquelles on n'a pas fait subir la partie du test qui correspond le plus au langage ou formalisme appris à l'école (cahier A, ci-dessous). Ce choix doit répondre à certaines analyses locales qui ont leur importance pédagogique ; nous retiendrons quant à nous que l'ensemble des classes totalise un échantillon de 1621 élèves, susceptible de représenter les différents types d'aptitudes au niveau des capacités cognitives ou opératoires ayant pour champ le nombre et l'espace ; champ que vise précisément le test.

Composition du test.

Le test est composé de cinq cahiers totalisant 95 items élaborés par R. Gras à l'exception des 16 premiers items du deuxième cahier qui sont extraits d'un test du Conservatoire des Arts et Métiers et de l'Institut National du Travail et de l'Orientalion Professionnelle (I.N.O.P.) avec l'aimable autorisation de ces organismes. Il faut se garder de croire à une quelconque hypothèse de corrélation entre les différents cahiers et les différents niveaux de la taxinomie (cf. § 2 ci-dessus). C'est fortuitement que l'ensemble des tests a été construit autour de cinq cahiers. Nous allons décrire cahier par cahier la nature et le détail des différents items.

Le premier Cahier (codé A) doit permettre de "mesurer", outre la reconnaissance des concepts relationnels, l'aptitude à changer de mode de représentation conceptuelle, à analyser et induire ou à appréhender a priori la propriété de Thalès (item 22). Ce cahier est composé de 28 items sur les notions de relations, fonctions, nombres relatifs et décimaux, encadrement, équations, organigrammes et suites arithmétiques. (Durée du test de ce cahier : 45 minutes).

1 - Une relation R définie sur l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ admet pour diagramme sagittal le diagramme 1 ci-dessous.

Complète le diagramme cartésien 2 de cette même relation, à l'aide de croix.

A1

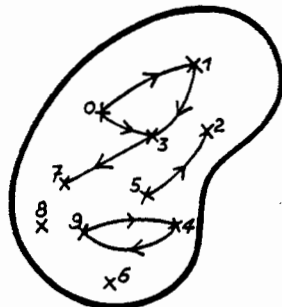


Diagramme 1

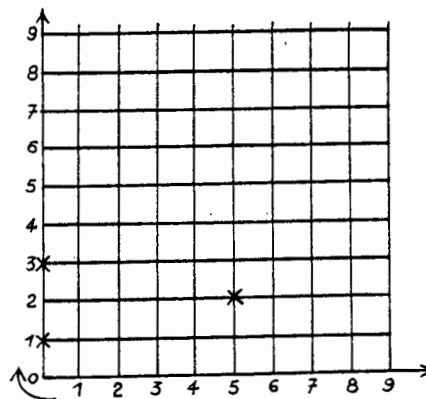


Diagramme 2

On a déjà mis, par exemple, une croix à l'intersection de la colonne 5 et de la ligne 2 pour indiquer que 5 est en relation avec 2, comme l'indi-

que le diagramme 1.

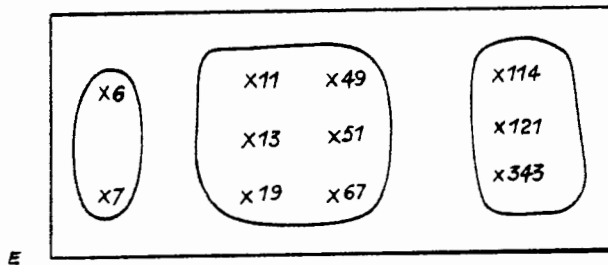
2- Voici un ensemble E de nombres :

{6,7,11,13,19,49,51,67,114,121,343}

La relation R_1 de E dans E de lien verbal :

"... s'écrit avec autant de chiffres que..."

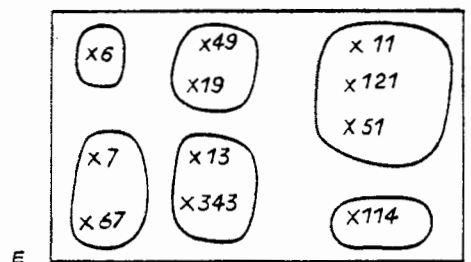
permet de classer les éléments de E comme l'indique le schéma ci-après :



Trouve un lien verbal pour chacune des relations R_2, R_3 et R_4 de E dans E qui permette de classer, respectivement, les éléments de E comme l'indiquent les schémas suivants :

2-1

A 2

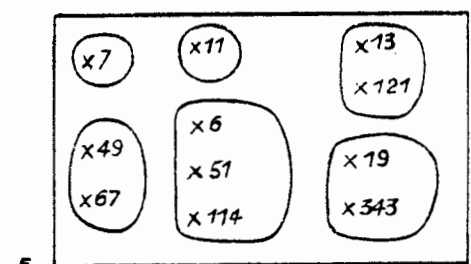


Partition définie par R_2

Lien verbal :

2-2

A 3

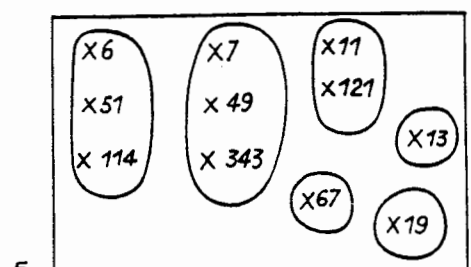


Partition définie par R_3

Lien verbal :

2-3

A 4



Partition définie par R_4

Lien verbal :

3-Voici deux ensembles de nombres

$$A_5 \quad A = \{5, 2, -3, 4\}$$

$$B = \{-15, 20, 10, 25\}$$

x représente un élément de A , y un élément de B . Parmi les six relations proposées ci-dessous, une seule est une bijection de A vers B . Entoure le numéro de la bonne réponse.

$y = -5 \times x$	$y = 10 \times x$	$x = y + 20$	$y = 5 \times x$	$x = 5 \times y$	$x = y$
Réponses: 1	2	3	4	5	6

4-Voici un ensemble de nombres

$$\{3, -2, 6, 4, -12\}$$

Quel est l'ensemble des images de ces nombres par l'application qui les triple.

Tu choisis, comme précédemment, la réponse qui te semble convenir.

$\{12, -24, 6, -6, 18\}$	$\{18, -9, -6, 36, -12\}$	$\{9, -6, -36, -15, -12\}$
Réponses: 1	2	3

$\{19, 12, -36, 18, -9\}$	$\{9, -6, -36, 18, -12\}$	$\{-36, 18, -6, 9, 12\}$
4	5	6

5-Parmi les nombres suivants, trois d'entre eux sont images des nombres : 7,5 ; -3, 4 et 1,6 par l'application : $X \rightarrow 1,5 \times x$.

A7

Entoure ceux qui sont les images des nombres précédents :

12,25 ; 1,9 ; -5,4 ; 2 ; 2,4 ; -4,8 ; -5,1 ; -1,7 ; 11,25 ; 3,75.

6-Il s'agit maintenant de reconnaître des applications définies sur l'ensemble des nombres entiers. Elles sont suggérées par des images de quelques nombres. Complète les pointillés par des nombres, images ou antécédents de nombres proposés en t'aidant des exemples.

6.1

$f : 0 \rightarrow 0$	$f : 4 \rightarrow \dots$
$f : 1 \rightarrow 1$	$f : -5 \rightarrow 25$

A8

$f : 2 \rightarrow \dots$	$f : \dots \rightarrow 49$
$f : 3 \rightarrow 9$	$f : \dots \rightarrow 49$

6.2

$g : 0 \rightarrow 0$	$g : -4 \rightarrow \dots$
$g : 1 \rightarrow 0,5$	$g : -2 \rightarrow \dots$

A9

$g : 2 \rightarrow 1$	$g : -3 \rightarrow -1,5$
$g : 3 \rightarrow \dots$	$g : \dots \rightarrow -2$

6.3-On note $g \circ f$ l'application "f suivie de g", c'est-à-dire la composée de f et g . Complète comme précédemment en t'aidant de l'exemple

A10

$g \circ f : 0 \rightarrow \dots$	$g \circ f : \dots \rightarrow 18$
$g \circ f : 1 \rightarrow 0,5$	$g \circ f : \dots \rightarrow 18$
$g \circ f : 2 \rightarrow \dots$	$g \circ f : \dots \rightarrow 32$
$g \circ f : -4 \rightarrow \dots$	$g \circ f : \dots \rightarrow 32$

7 -

7-1-A l'école, l'année dernière, on a mesuré Pascale avec une toise et on a relevé 1,31m. Cette mesure est faite à un demi-centimètre près, c'est-à-dire qu'il peut y avoir une différence d'un demi-centimètre entre la vraie longueur et la longueur repérée. Entre quelles hauteurs se situait la taille de Pascale? Entoure le numéro de la bonne réponse.

A 11

- 1,30 m ; 1,32 m
- 1,305 m ; 1,315 m
- 1,3005 m ; 1,3015 m

Réponses :
1

2

3

- 1,30 m ; 1,305 m
- 1,310 m ; 1,315 m
- 1,3095 m ; 1,3105 m

4

5

6

7-2-Je sais qu'elle a grandi cette année de 2 cm. Entre quelles hauteurs se situe maintenant sa vraie taille? Entoure le nombre choisi.

A 12

- 1,32 m ; 1,34 m
- 1,315 m ; 1,325 m
- 1,325 m ; 1,335 m

Réponses :
1

2

3

- 1,3295 m ; 1,3305 m
- 1,3205 m ; 1,3215 m
- 1,33 m ; 1,335 m

4

5

6

8-Complète par le nombre convenable :

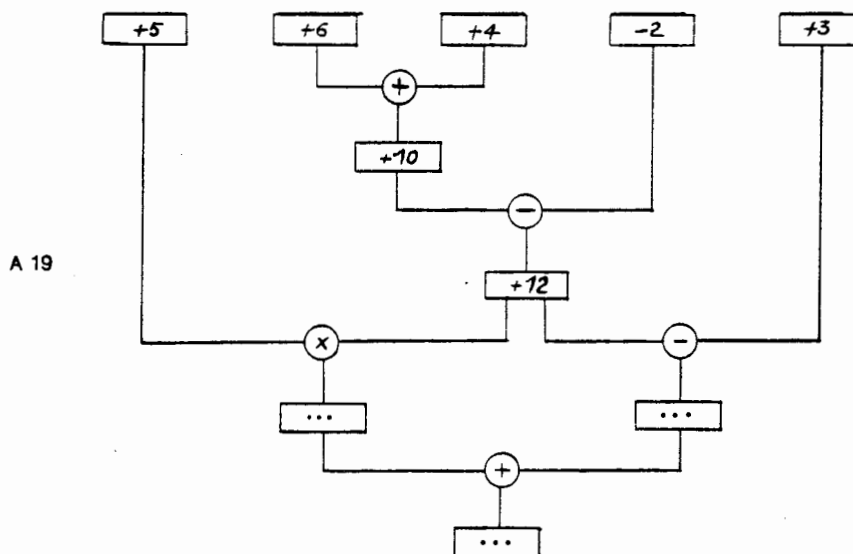
- 8-1 A13 (...)+(+3)=(+2)
- 8-2 A14 (+2)-(...)=(+7)
- 8-3 A15 (...) \times (+4)=(-8)

9-Quelle est la valeur de a pour que

- 9-1 A16 +3+a=+11 \rightarrow a=...
- 9-2 A17 -12=a+6 \rightarrow a=...
- 9.3 A18 7 \times a=-98 \rightarrow a=...

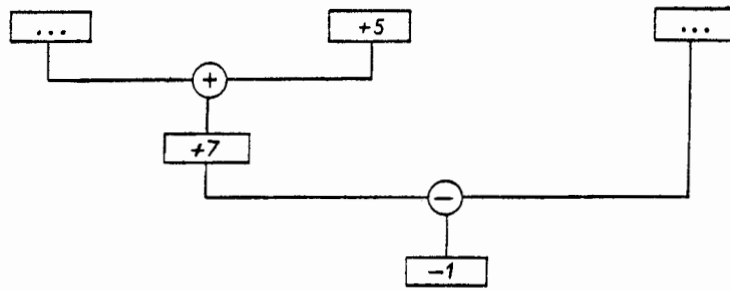
10-Complète les schémas suivants :

10-1



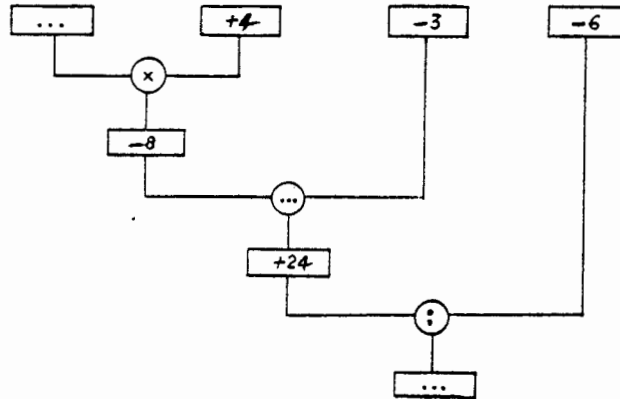
10-2

A 20



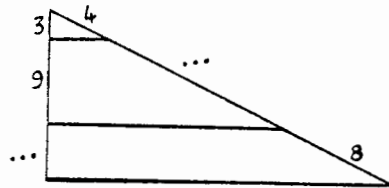
10-3

A 21



11-Complète par des nombres entiers

A 22



12-Prolonge chaque suite par trois termes

A23	12-1	5	6	8	11	15				
A24	12-2	1	3	9	27	81				
A25	12-3	1	5	4	8	7	11				
A26	12-4	1	2	5	10	17	26				
A27	12-5	100	99	95	86	70	45				
A28	12-6	10	5	11	4	13	2	17	-2	25

Le second cahier (codé B pour sa première partie et B' pour sa seconde) exige une aptitude à enchaîner des suites logiques et fait appel à des qualités d'analyse et de synthèse implicatives. La deuxième partie (B') mène insidieusement deux types de processus mentaux :

- a) reconnaissance d'une certaine relation (comportement plutôt "convergent" selon la terminologie de R. Gras ;
- b) suite logique comme dans la première partie (B), (comportement plutôt "extensif") ; c'est le cas des items 19,24 et 25 de B'.

Ce second cahier comprend 28 items portant sur des séries progressives avec recherche de lois et d'analogies dans des situations géométriques. La durée du test de ce cahier est de 30 minutes.

Compte tenu du rôle que jouent les seize premiers exercices (formant la partie B) dans un test d'orientation des enfants du premier cycle, on comprendra qu'on ne peut reproduire ici le texte de ces exercices. Toute-

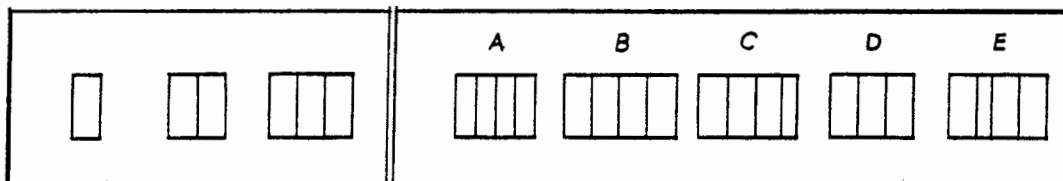
fois, on peut savoir que les items B29 à B44 sont construits sur le modèle des exemples suivants. Un titre rapide de chacun de ces items pourra être distingué dans la lecture de l'arbre des classifications.

CAHIER 2 : SERIES PROGRESSIVES (parties B)

Regardez la première bande de dessins.

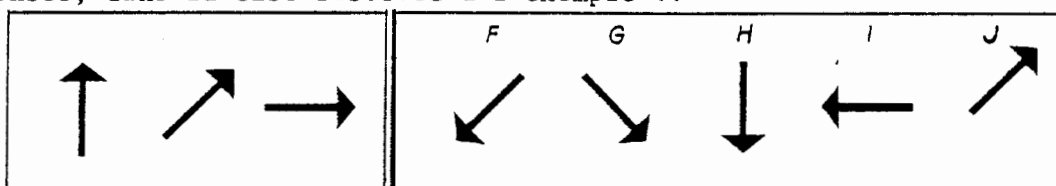
A gauche du trait vertical, les trois figures se suivent dans un certain ordre. Vous remarquez que chacune est formée d'un rectangle de plus que la précédente, et que les rectangles sont tous égaux.

Vous devez trouver, parmi les cinq figures dessinées à droite du trait vertical, celle qu'il faudrait placer à la suite des trois premières pour continuer la série.

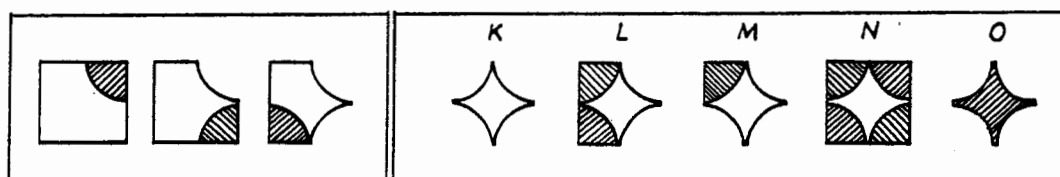


Vous voyez que c'est la figure B qui convient, puisqu'elle est formée de quatre rectangles de mêmes dimensions que ceux qui composent les trois premières figures.

C'est pourquoi on a mis une croix sur la lettre B sur la feuille de réponses, dans la case réservée à l'exemple 1.



Dans cette deuxième bande, les trois premières flèches sont orientées dans des directions différentes. La direction indiquée par une flèche forme avec celle qui est indiquée par la précédente un angle de 45° ; et les flèches tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. La bonne réponse est donc G. Sur votre feuille de réponses et dans la case réservée à l'exemple 2, mettez une croix sur la lettre G.



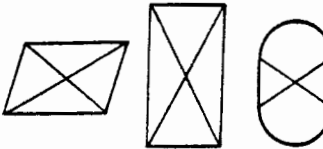
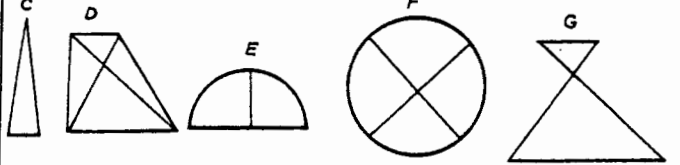
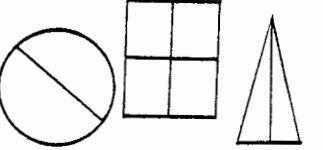
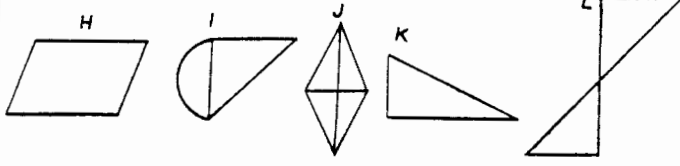
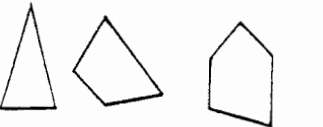
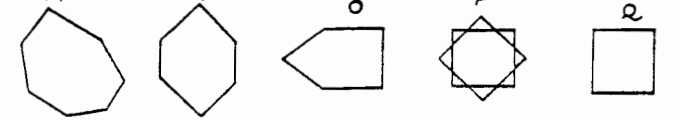
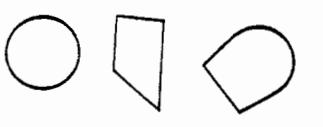

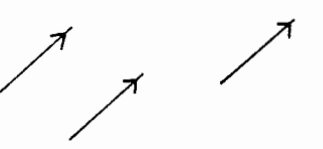
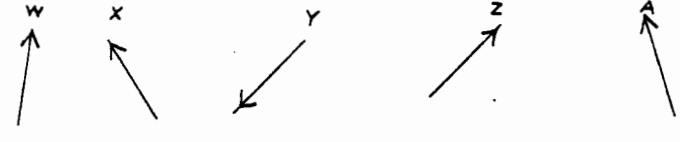

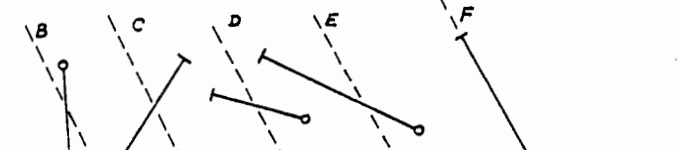
Cherchez seul la réponse au troisième exercice et sur votre feuille de réponses, dans la case réservée à l'exercice 3, mettez une croix sur la lettre correspondante à la réponse que vous aurez choisie.

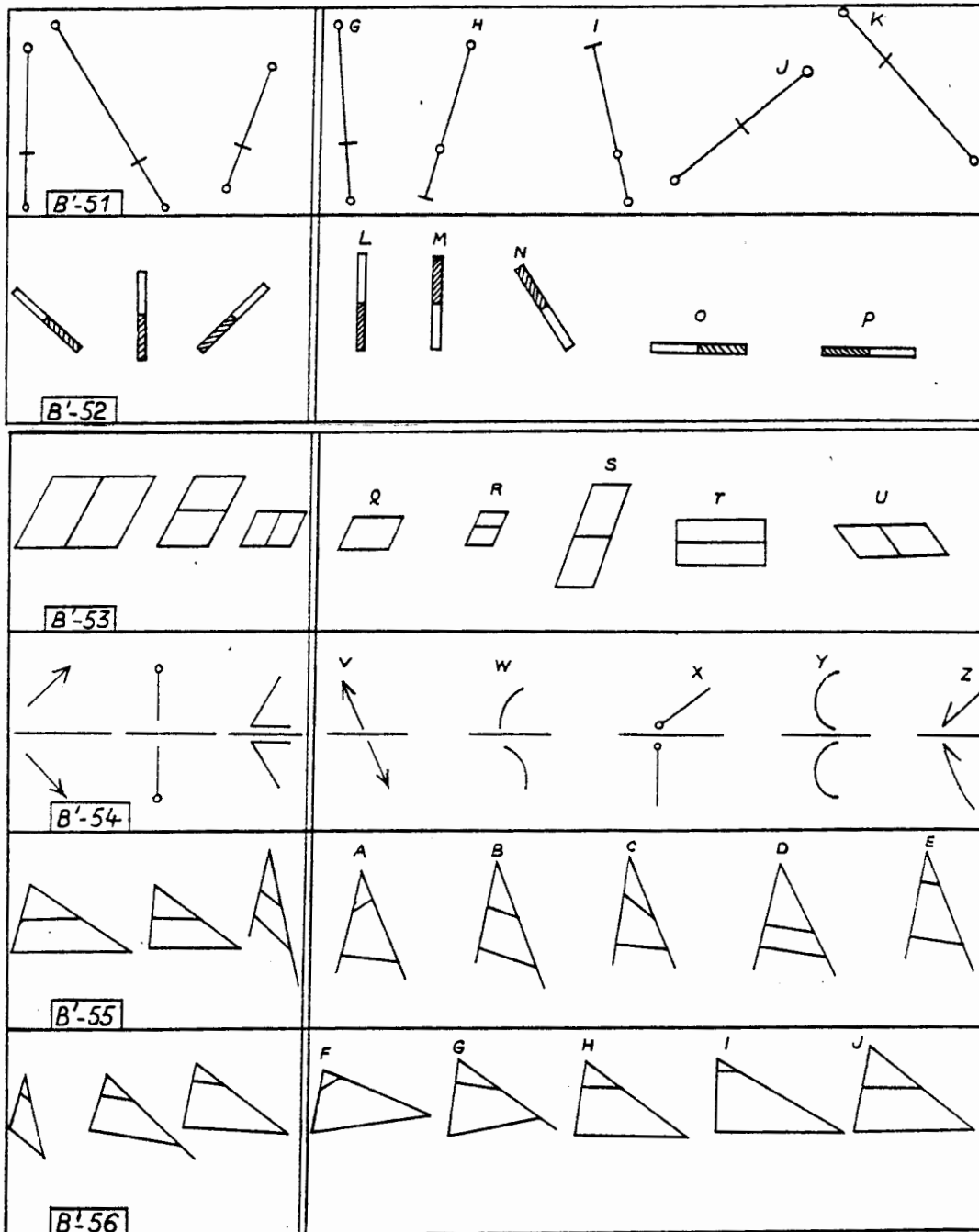
Ne tournez pas la page, attendez le signal

Comme nous venons juste de le signaler ci-dessus, nous ne pouvons pour des raisons de discrétion, reproduire ici les 16 items prélevés dans un cahier de l'I.N.O.P.

CAHIER 2 : SERIES PROGRESSIVES (suite, partie B')

Entoure la réponse qui te paraît avoir le plus d'analogies avec les trois figures proposées ou qui en représente une suite logique.

 <p>B'45</p>	
 <p>B'46</p>	
 <p>B'47</p>	
 <p>B'48</p>	
 <p>B'49</p>	
 <p>B'50</p>	



Le troisième Cahier (codé C) exige une excellente observation des phénomènes physiques liés aux ombres donnés par le soleil dont l'effet de perspective est annulé à partir d'une décentration de l'observateur. Ce cahier comporte 8 items précédés de deux exemples sur les propriétés des ombres solaires ; ces propriétés sont généralement de nature affine : parallélisme, convexité, milieu... La durée du test de ce cahier est de dix minutes.

CAHIER 3 : JEUX D'OMBRES

Le soleil rentre dans une pièce par une fenêtre de forme ou de fermeture différentes d'un dessin à l'autre. Il s'agit de prévoir la forme

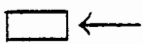
réelle de l'ombre de cette fenêtre sur le sol ou sur un mur, (c'est-à-dire de telle façon qu'on pourrait l'y dessiner à la craie), suivant le cas indiqué par la flèche. Le soleil n'est pas toujours placé de la même façon par rapport à la fenêtre ; sa représentation est toujours donnée ainsi : ☼

On propose cinq solutions pour l'ombre projetée : la flèche indique d'où arrive la lumière.

Ainsi :



représente une ombre possible sur le sol, la lumière arrivant d'en haut.



représente une ombre possible sur un mur, la lumière arrivant de droite.

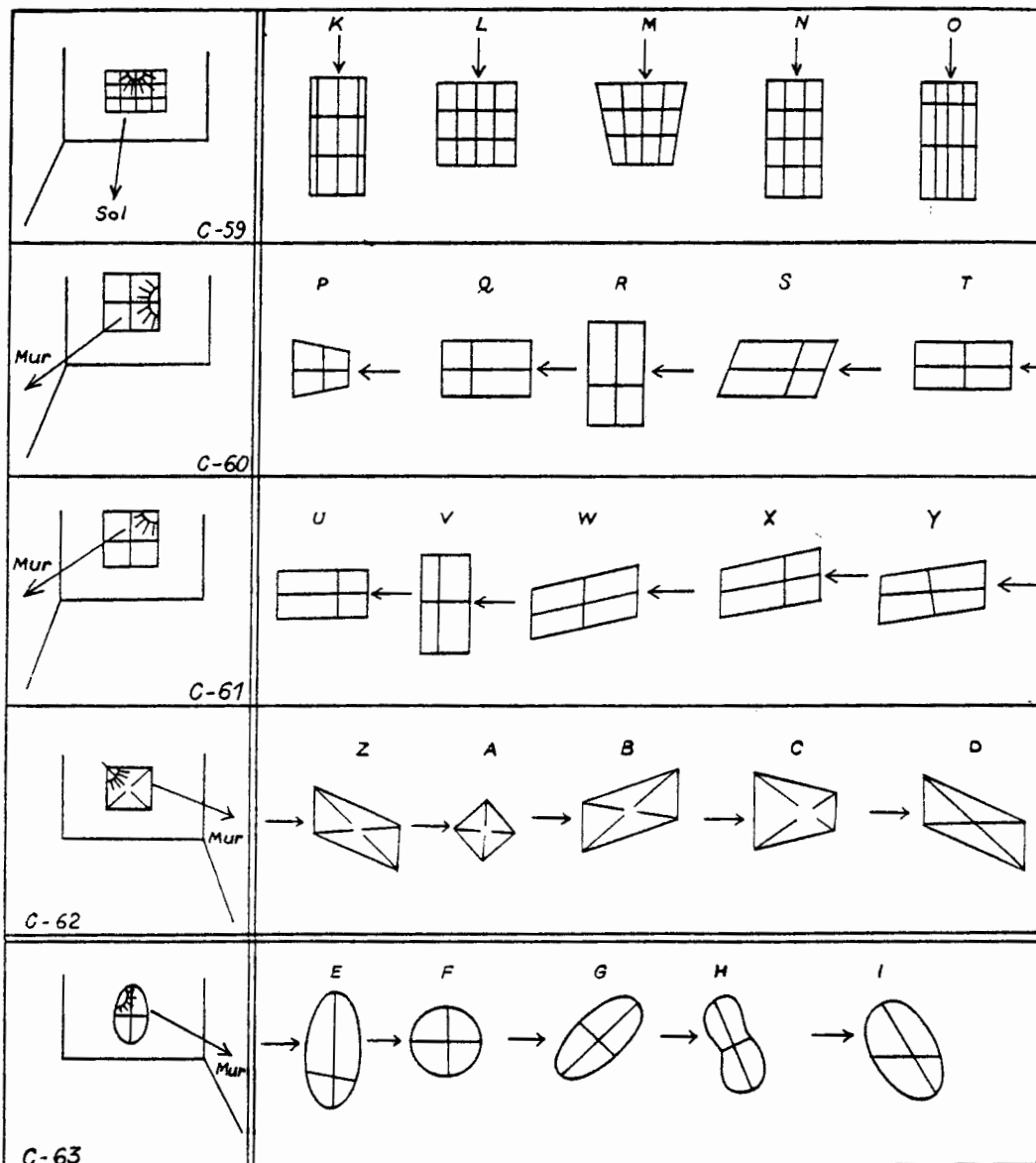


représente une ombre possible sur un mur, la lumière arrivant de gauche.

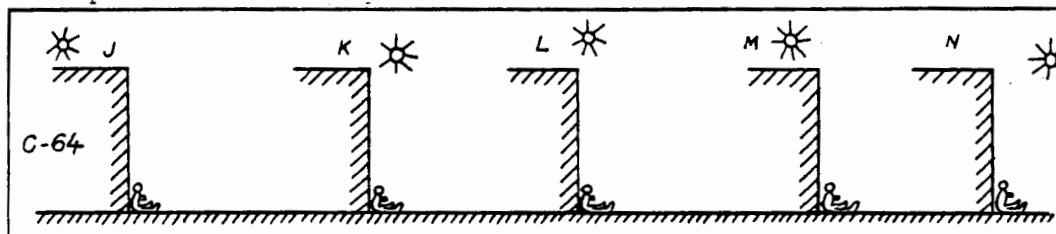
<p>Exemple 1</p>	<p>(A) (B) (C) (D) (E)</p>
<p>Exemple 2</p>	<p>F (G) (H) (I) (J)</p>

Dans chacun des exercices suivants, entoure le numéro de la bonne réponse comme dans les deux exemples ci-dessus.

<p>C-57</p>	<p>A B C D E</p>
<p>C-58</p>	<p>F G H I J</p>



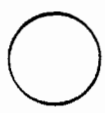
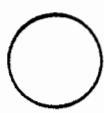

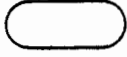
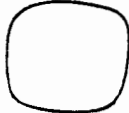
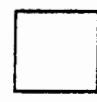

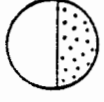
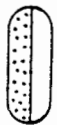
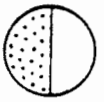

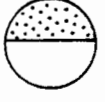
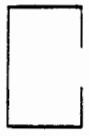


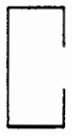
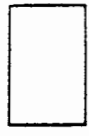

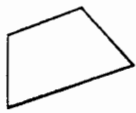

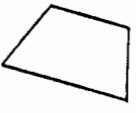
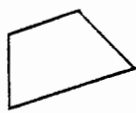

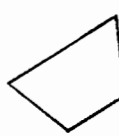
Dans quelle position le soleil donne-t-il plus d'ombre pour le dormeur assis au pied du mur?



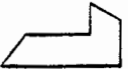
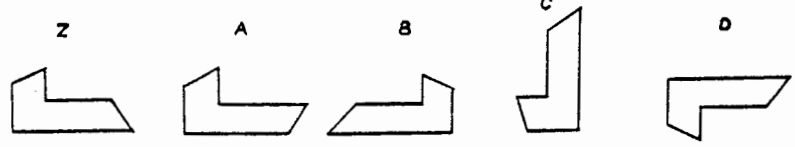
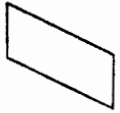
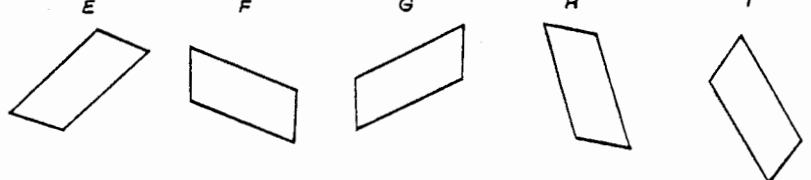


Le quatrième Cahier (codé D) tente de "mesurer" l'aptitude à relativiser son observation par rapport à un système donné de référence (à 1, 2 ou 3 dimensions) ou bien, tout simplement, à appliquer ses connaissances au champ euclidien concret (items 12 et 13 du cahier). Ce cahier comporte 13 items sur des propriétés euclidiennes : mesures, angles, orientation, etc., illustrées par des tâches à symétriser. La durée du test de ce cahier est de 20 minutes.

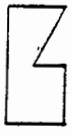
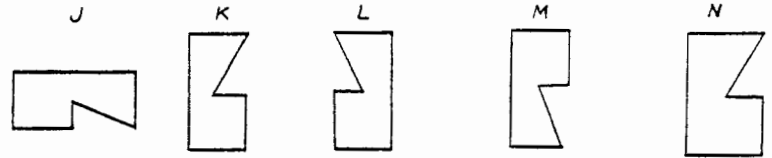
CAHIER 4 : JEUX DE TACHES ET DIVERS (D)

Tu ouvres un cahier sur deux pages blanches. Sur la page de gauche, tu dessines un objet et tu le peins. Tu refermes le cahier et obtiens ainsi, sur la page de droite, une tache colorée de ton dessin. Supposons qu'il n'y ait aucune bavure. Nous allons te demander en fonction de ton dessin quelle tache tu a pu obtenir. A gauche, nous dessinons ce qui est apparu sur la page de gauche ; à droite, tu choisiras parmi cinq propositions quelle tache tu peux obtenir sur la page de droite.

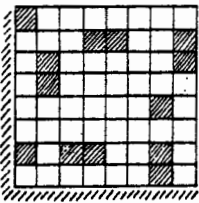
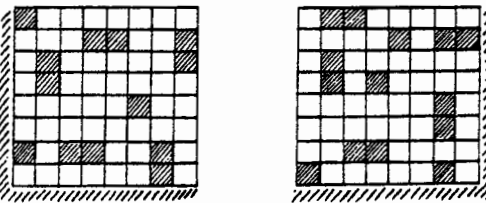
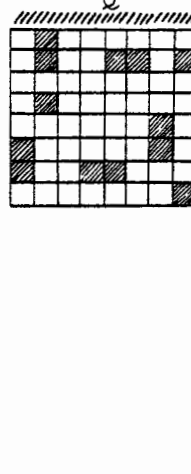
 D-65	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">A </div> <div style="text-align: center;">B </div> <div style="text-align: center;">C </div> <div style="text-align: center;">D </div> <div style="text-align: center;">E </div> </div>
 D-66	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">F </div> <div style="text-align: center;">G </div> <div style="text-align: center;">H </div> <div style="text-align: center;">I </div> <div style="text-align: center;">J </div> </div>
 D-67	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">K </div> <div style="text-align: center;">L </div> <div style="text-align: center;">M </div> <div style="text-align: center;">N </div> <div style="text-align: center;">O </div> </div>
 D-68	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">P </div> <div style="text-align: center;">Q </div> <div style="text-align: center;">R </div> <div style="text-align: center;">S </div> <div style="text-align: center;">T </div> </div>

 <p>D-69</p>	<p>U V W X Y</p> 
 <p>D-70</p>	<p>Z A B C D</p> 
 <p>D-71</p>	<p>E F G H I</p> 

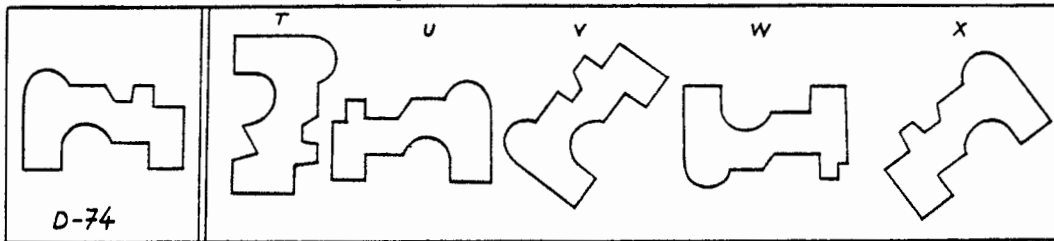
Cette fois, tu appliques une feuille de dessin sur la page droite du cahier où se trouve la tache précédente. A gauche se trouve toujours la figure originale ; reconnaître à droite quelle figure parmi les cinq proposées représente la tache sur la feuille de dessin.

 <p>D-72</p>	<p>J K L M N</p> 
---	---

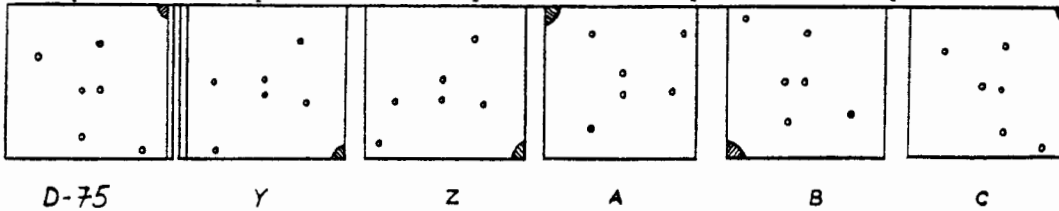
On a dessiné à gauche une grille de mots croisés. Retrouve-la à droite, sachant qu'elle a pu être déplacée.

 <p>D-73</p>	<p>O P</p> 	<p>Q R S</p> 
---	--	--

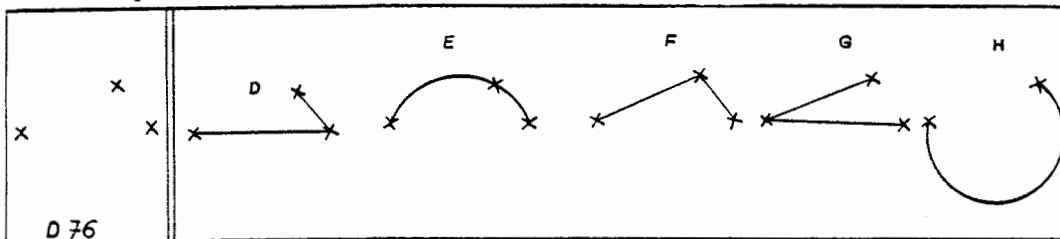
Voici à gauche le dessin d'un objet plat posé sur la table. Pendant que tu te retournes, un camarade peut le faire glisser et le retourner. Reconnais-le dans une nouvelle position à droite.



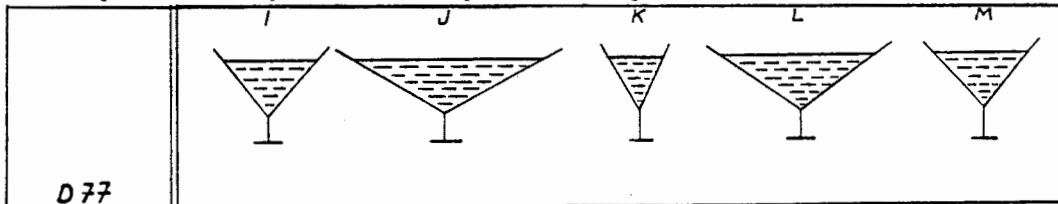
Six billes ont roulé sur la table comme l'indique le dessin de gauche. Tu te déplaces autour de la table et vois alors les billes d'une autre place. Quel dessin parmi les cinq de droite représente ce que tu vois?



Quel est le chemin le plus court permettant de passer par les trois points marqués d'une croix?



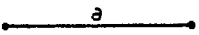
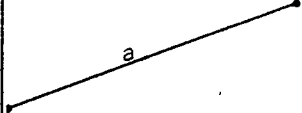
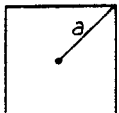
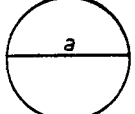
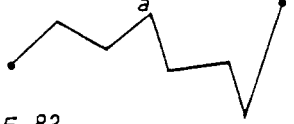

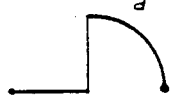
Dans quel verre y a-t-il le plus de liquide?



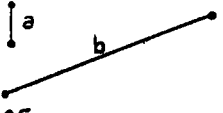
Le cinquième Cahier (codé E) doit permettre de rendre compte de l'intégration du centimètre au champ sensorimoteur de l'enfant (dans des situations à une ou deux dimensions), de l'aptitude à changer d'unité de référence, de la connaissance des algorithmes simples du calcul d'aires et enfin, de l'aptitude à évaluer des objets hors du champ perceptif, c'est-à-dire, évoqués seulement. Ce cahier comporte 18 items sur des estimations de mesures de longueurs ou d'aires d'objets représentés ou évoqués.

CAHIER 5 : EVALUATIONS (E) (1)

Les extrémités d'une ligne a sont marquées par deux points sur la figure de gauche. Quelle est la longueur, au demi-centimètre près de a? Entoure la bonne réponse.

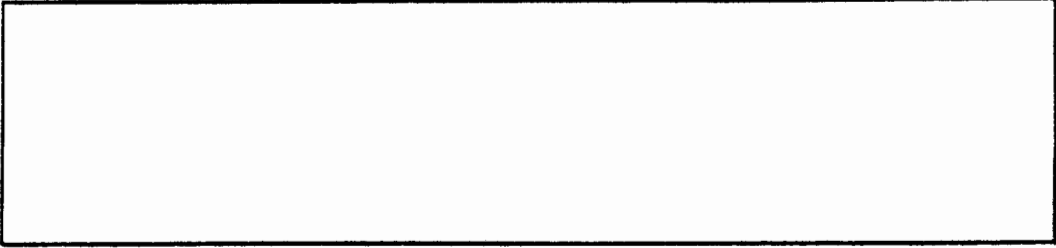
 E-78	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> <td>E</td> </tr> <tr> <td>2 cm</td> <td>3 cm</td> <td>4 cm</td> <td>5 cm</td> <td>7 cm</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	7 cm
A	B	C	D	E							
2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	7 cm							
 E-79	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>F</td> <td>G</td> <td>H</td> <td>I</td> <td>J</td> </tr> <tr> <td>3 cm</td> <td>4 cm</td> <td>5 cm</td> <td>6 cm</td> <td>8 cm</td> </tr> </tbody> </table>	F	G	H	I	J	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	8 cm
F	G	H	I	J							
3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	8 cm							
 E-80	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>L</td> <td>M</td> <td>N</td> <td>O</td> </tr> <tr> <td>1 cm</td> <td>2 cm</td> <td>3 cm</td> <td>4 cm</td> <td>5 cm</td> </tr> </tbody> </table>	K	L	M	N	O	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
K	L	M	N	O							
1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm							
 E-81	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>P</td> <td>Q</td> <td>R</td> <td>S</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>1 cm</td> <td>2 cm</td> <td>3 cm</td> <td>4 cm</td> <td>6 cm</td> </tr> </tbody> </table>	P	Q	R	S	T	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	6 cm
P	Q	R	S	T							
1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	6 cm							
 E-82	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>U</td> <td>V</td> <td>W</td> <td>X</td> <td>Y</td> </tr> <tr> <td>6 cm</td> <td>8 cm</td> <td>10 cm</td> <td>12 cm</td> <td>14 cm</td> </tr> </tbody> </table>	U	V	W	X	Y	6 cm	8 cm	10 cm	12 cm	14 cm
U	V	W	X	Y							
6 cm	8 cm	10 cm	12 cm	14 cm							
 E-83	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>Z</td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>2,5 cm</td> <td>3,5 cm</td> <td>4,5 cm</td> <td>5 cm</td> <td>7,5 cm</td> </tr> </tbody> </table>	Z	A	B	C	D	2,5 cm	3,5 cm	4,5 cm	5 cm	7,5 cm
Z	A	B	C	D							
2,5 cm	3,5 cm	4,5 cm	5 cm	7,5 cm							
 E-84	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>E</td> <td>F</td> <td>G</td> <td>H</td> <td>I</td> </tr> <tr> <td>3 cm</td> <td>4 cm</td> <td>5 cm</td> <td>7 cm</td> <td>9 cm</td> </tr> </tbody> </table>	E	F	G	H	I	3 cm	4 cm	5 cm	7 cm	9 cm
E	F	G	H	I							
3 cm	4 cm	5 cm	7 cm	9 cm							

Combien le segment b contient-il de segments tels que a?

 E-85	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>J</td> <td>K</td> <td>L</td> <td>M</td> <td>N</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> </tbody> </table>	J	K	L	M	N	6	4	8	10	12
J	K	L	M	N							
6	4	8	10	12							

(1) La nécessité d'une réduction d'échelle pour la reproduction des schémas peut rendre impopulaire l'évaluation proposée. Toutefois, cela ne gêne pas à la compréhension de la nature de l'exercice.

Quelles sont la longueur et la largeur de la case ci-dessous, au centimètre près?

				
O	P	Q	R	S
2 cm et 15 cm	1 cm et 10 cm	3 cm et 20 cm	2 cm et 10 cm	3 cm et 13 cm

E-86

Quelle est environ la hauteur d'un bâtiment scolaire de quatre étages (rez-de-chaussée compris) à toit plat? Entoure la réponse la plus vraisemblable.

T	U	V	W	X
2 m	4 m	8 m	12 m	24 m


E-87

Quelle est environ la longueur d'une cigarette gauloise ordinaire? Entoure la réponse la plus vraisemblable.

Y	Z	A	B	C
3 cm	5 cm	7 cm	10 cm	15 cm

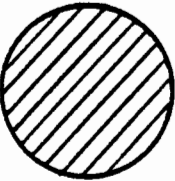
E-88

Quelle est l'aire la plus vraisemblable du rectangle dessiné à gauche?

	D	E	F	G	H
	1 mm ²	1 cm ²	4 cm ²	20 cm ²	1 dm ²

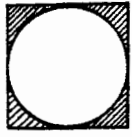
E-89

Quelle est l'aire approchée au cm² près du disque représenté à gauche?

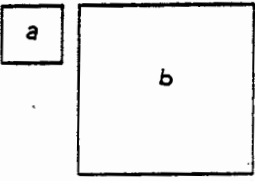
	I	J	K	L	M
	1 cm ²	3 cm ²	5 cm ²	10 cm ²	1 dm ²

E-90

Quelle est l'aire approchée au cm^2 près de la partie hachurée dans le dessin représenté à gauche?

 <p>E-91</p>	<table style="margin: auto;"> <tr> <td>N</td> <td>O</td> <td>P</td> <td>Q</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>1cm^2</td> <td>2cm^2</td> <td>3cm^2</td> <td>5cm^2</td> <td>10cm^2</td> </tr> </table>	N	O	P	Q	R	1cm^2	2cm^2	3cm^2	5cm^2	10cm^2
N	O	P	Q	R							
1cm^2	2cm^2	3cm^2	5cm^2	10cm^2							

Combien le carré b contient de carrés tels que a?

 <p>E-92</p>	<table style="margin: auto;"> <tr> <td>S</td> <td>T</td> <td>U</td> <td>V</td> <td>W</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>25</td> </tr> </table>	S	T	U	V	W	4	6	9	12	25
S	T	U	V	W							
4	6	9	12	25							

Quelle est l'aire la plus vraisemblable de cette page de test?

X	Y	Z	A	B
10 cm^2	50 cm^2	1 dm^2	6 dm^2	10 dm^2

E-93

Quelle est l'aire la plus proche de celle d'un timbre rouge de 0,50F actuel? (Marianne).

C	D	E	F	G
20 cm^2	1 cm^2	10 cm^2	15 cm^2	5 cm^2

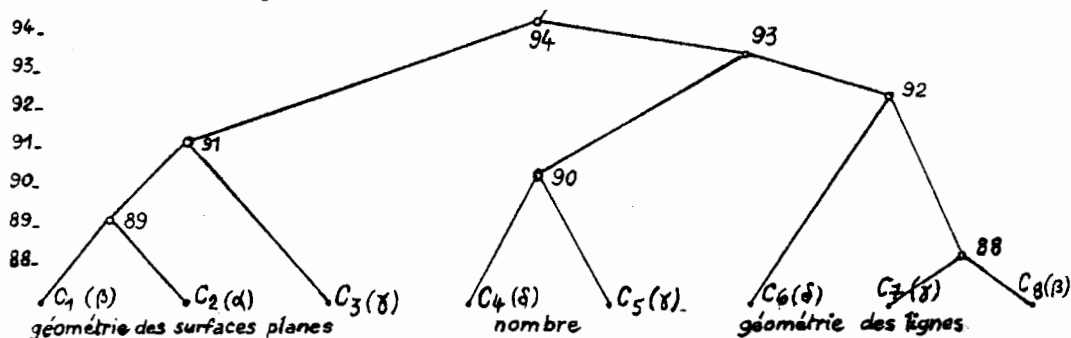
E-94

Quelle est l'aire la plus proche de celle d'une carte postale ordinaire?

H	I	J	K	L
1 dm^2	$1,5\text{ dm}^2$	2 dm^2	$2,5\text{ dm}^2$	3 dm^2

E-95

L'accord entre les deux classifications est donc excellent. Mais il est important également de noter que la couleur d'une même classe reste dominée par un thème mathématique donné, on peut dans ces conditions schématiser l'arbre de la façon suivante.



On suivra à partir de maintenant l'interprétation sur l'arbre condensé ci-après.

4.1. Examen de la classe $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ et de ses composantes

La classe C_1 , dont le niveau dominant est, β , est peut-être celle la moins homogène ; elle est d'ailleurs composée de variables très neutre. Pourtant, à travers tous les items la composant, il s'agit principalement d'analyser un fait mathématique et de le transposer. Le fait a un caractère concret même pour la question concernant le passage d'un diagramme sagittal à celui cartésien. La maîtrise que l'élève a sur le fait s'exprime par la substitution graphique, représentative d'une action ou d'une manipulation. En particulier, on trouve dans cette classe associées les deux paires d'items {D76, D77} et {D73, D74} qui reflètent parfaitement ce type d'aptitude. D'autre part, en ce qui concerne l'item E87 (hauteur d'un bâtiment de quatre étages), il est envisagé par les enfants, comme un problème non pas à une mais à deux dimensions, car l'objet est bien appréhendé de cette façon dans son évocation.

La classe C_2 a tous ses items correspondants au niveau α de la taxinomie. Ces derniers supposent une action effectuée mentalement ou physiquement par les enfants ; la tâche de peinture sur une page qui est reproduite sur une autre, est vécue au niveau sensori-moteur. La différence entre les diverses associations dans cette classe tient à la position de l'objet considéré :

Une première sous-classe {B'50, D65, D66, D67} réunit des questions où seule la configuration gauche droite est à examiner. Bien qu'il corresponde à une symétrie centrale, la présence de l'item B'50 dans cette classe montre que c'est à tort que D65, D66 et D67 ont été d'abord interprétés comme un "pliage" dans un espace à deux dimensions.

La deuxième sous classe {D68, D69, D70, D71} se distingue de la première en ce que les lignes de référence ne sont plus les bords de la feuille, haut bas d'une part, gauche-droite d'autre part, doivent simultanément intervenir.

La classe C_3 est formée uniquement d'items relevant du niveau γ de la taxinomie, lesquels demandent une compréhension des relations ou structures dans certaines situations géométriques. Cette compréhension pouvant

être testée dans des situations familières. Deux sous classes qui se distinguent par la nature de l'objet traité composent C_3 :

Une première formée surtout d'items du troisième cahier : ombres de différentes formes données par le soleil. La compréhension des questions de ce cahier suppose celle d'un long texte préambule qui introduit un facteur verbal non négligeable. C'est sans doute ce facteur qui intervient pour introduire dans cette classe l'item D72 qui est pourtant de même nature que les items D65, ..., D71 qui le précèdent.

La deuxième sous-classe de C_3 porte sur l'évaluation d'aires de formes planes diverses. Toutefois, on note dans cette classe la présence de l'item E85 où il s'agit d'évaluation unidimensionnelle ; pourtant la présence de cet item s'accorde très heureusement avec celle de E92 sous-tendu par une branche voisine. En effet, dans les deux cas, l'unité de longueur ou d'aire n'est ni le centimètre ni le centimètre carré et il s'agit par conséquent d'itérer par rapport à une nouvelle unité. Le fait que E85 soit sous-tendu par la première branche de cette sous classe de C_3 et que E92 soit sous-tendu par la deuxième branche, correspond à ce que ces deux items procèdent de deux niveaux différents de complexité. C'est également cette opération d'itération par rapport à une unité de mesure qui provoque la réunion de E92 à E94 (aire d'un timbre évoqué). On notera enfin d'autres associations d'items deux à deux de contenu voisin : E90 et E91, E93 et E95.

4.2. Examen de la classe $C_4 \cup C_5$ et de ses composantes .

Il s'agit ici, de façon générale, de découvrir, dans des situations numériques, des algorithmes ou de nouvelles relations. Ces situations exigent une bonne compréhension des concepts sous-jacents.

Les items proposés dans la classe C_4 qui sont surtout de niveau δ , font appel à l'imagination des enfants ; analyse et synthèse des faits mathématiques observés sont indispensables, un élément de créativité les complète. On ne s'étonnera donc pas d'avoir une classe de bonne cohésion ponctuée par six noeuds significatifs correspondants à six maxima de la statistique locale des niveaux. Examinons les constituants de cette classe :

Un premier agrégat réunit les trois items A2, A3 et A4 qui supposent la découverte d'une relation implicite et son expression verbale.

Les deux items A11 et A12 sont très proches et reliés dès le premier niveau. On est surpris de rencontrer ensuite dans la classe deux items B41 et C58 associés à un niveau relativement élevé. Toutefois, l'item B41 "prolonger un labyrinthe" met en oeuvre un processus opératoire voisin de celui dont il va être question maintenant.

Une dernière sous classe très cohérente (quatre noeuds significatifs) groupe les sept derniers items du cahier A : A22 à A28. Il n'est pas étonnant de rencontrer ici l'item A22 que les enfants ont réellement considéré comme un problème de prolongement de deux suites arithmétiques. R. Gras s'interroge dans ces conditions sur la possibilité d'extraire, par ce biais, une présentation de l'axiome de Thalès.

La classe C_5 est principalement formée d'items de niveau γ . Ces der-

niers ont maintenant une forme plus scolaire : applications, équations, expression arithmétiques, etc...

Une première classe est essentiellement formée d'items mettant en jeu la notion d'application. Cette classe se décompose d'ailleurs en deux sous classes dont la première fait appel à la notion d'application directe et dont la seconde, ponctuée d'ailleurs par un noeud significatif, se réfère à la notion de relation réciproque ou de contre-image (items A8, A10 et A9). La classe qui s'achève de façon cohérente (noeud significatif) se lie à la suivante avec un noeud significatif.

La seconde classe composante de C_5 relève des opérations algébriques : résolution d'équations ou complétion d'organigrammes selon le processus d'équation à trou. On note l'association deux à deux, modulo 3 pour les indices des items, des six équations proposées : A13 et A16, A14 et A17, A15 et A18. Ces associations confirment les hypothèses didactiques qui ont prévalu à l'élaboration de ces questions.

4.3. Examen de la classe $C_6UC_7UC_8$ et des ses composantes

L'objet ici considéré est généralement unidimensionnel, mais, même lorsque ce n'est pas tout à fait le cas, le traitement qui en est fait est dynamique : les transformations de géométrie affine y sont sous-jacentes.

La classe C_6 comporte presque exclusivement des items de niveau δ . Pour cette grosse classe de 18 items qui regroupe la majorité des items du sous cahier B, le classement au niveau δ se justifie par la nécessité pour l'élève d'analyser une situation évolutive, d'en dégager les constantes et les variables, d'en découvrir la loi de formation et de la mettre à l'épreuve. On ne doit pas être choqué de la présence dans cette classe de l'item D75 dont la solution fait appel à certains aspects de l'aptitude dont il est question ici, puisqu'il s'agit de suivre l'évolution d'une configuration jusqu'à reconnaître dans la suite celle donnée.

On a pu noter dans les examens précédents la place importante que détient ce cahier B au niveau du facteur intelligence, rotation, symétrie, translation, homothétie sont les transformations sous-jacentes aux items de B. Ce sont ces transformations qu'on a introduites dans les questions B'52, B'53 et B'54 qu'on retrouve associées à cette classe qui contient aussi B'47. Ces derniers items sont les seuls de B' à avoir été construits sur le modèle de ceux de B ; le traitement qu'en font les enfants s'en ressent en conséquence.

La classe C_7 , formée d'items de niveau γ , regroupe les items de B' à l'exception de cinq d'entre eux plus naturellement associés à d'autres items pour des raisons de complexité ou de netteté de l'objet à traiter. La méthode de résolution par analogie ou par analyse du contenu, provoque dans C_7 des associations significatives, ainsi B'55 et B'56 où l'homothétie est très évidente ; B'45 et B'46 où on met en évidence, par le tracé d'axes de symétrie, d'un centre ou d'un axe d'équilibre.

La classe C_8 est formée d'items de niveau α . Ici l'action de l'enfant sur les objets à une dimension à évaluer, est directe ; elle s'exerce par un report physique ou mental de l'unité sur l'objet qui est confondu avec sa représentation ou son évocation. Les items E78 à E88, à l'exception de E85 déjà classé, s'inscrivent dans l'ordre de leur apparition dans le

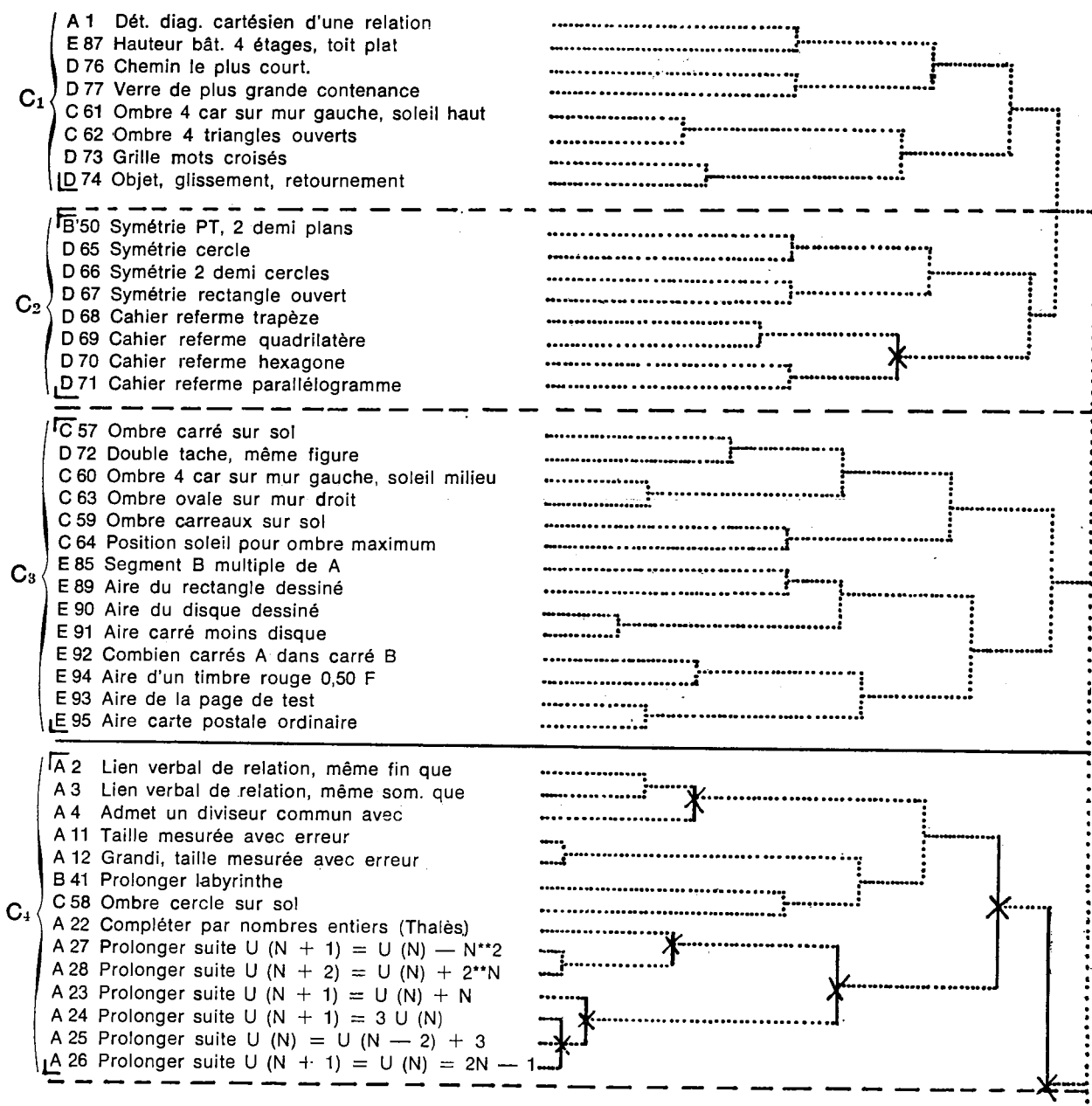
questionnaire. C'est une hiérarchie tout à fait naturelle, confirmée par celle de la complexité croissante recherchée par l'auteur des questions : E78 et E79 visent à évaluer la mesure d'un segment isolé ; E80 et E81 concernent la mesure d'un segment intégré dans une figure, l'association à un niveau supérieur de E82 à cette paire est naturelle et intéressante ;

Représentation de l'arbre condensé à ses niveaux les plus significatifs ; les nœuds significatifs sont marqués *

Arbre de répartition des Items.

Classification Lerman, test national, entrée quatrième.

Niveaux 1 A 20



C ₅	A 5	Bijection de A vers B	
	B 43	Glissement de 2 segments	
	A 6	Image d'un ensemble par application triple	
	A 7	Image des nombres par $F(X) = 1, 5 \times$	
	A 8	Compléter image ou antécédent « carré »	
	A 10	Compléter image ou antécédent composé f et g	
	A 9	Compléter image ou antécédent (demi)	
	A 13	Compléter $() + (+ 3) = (+ 2)$	
	A 16	Déterminer A : $3 + A = 11$	
	A 15	Compléter $() = (+ 4) = (- 8)$	
	A 18	Déterminer A. $7 + A = 38$	
	A 14	Compléter $(+ 2) - () = (+ 7)$	
	A 17	Déterminer A. $- 12 = A + 6$	
A 19	Compléter schéma (+, -, =)		
A 20	Compléter schéma (+, -)		
A 21	Compléter schéma (x, ,)		
C ₆	B 29	Coin effacé	
	B 30	Translation symétrie droite cercle	
	B 42	Symétries droites, 2 triangles	
	D 75	Déplacement de billes	
	B 31	Rotation symétrie droite carrés	
	B 35	Rotations, rond et croix	
	B 33	Rotation homothétie, 2 triangles	
	B 37	Rotation 90° et 45° triangle, segment	
	B 38	3 bâtonnets dans carré	
	B 39	Réduire et compter, 4, 3, 2, 1 sommets	
	B 32	Rotations carré, carré	
	B 34	Rotations 90° et 45° triangle, flèche	
	B 36	Rotations carré et croix	
B 40	Rotation chaise		
B'47	Polygones 3, 4, 5 côtés		
B'54	Symétrie droite horizontale		
B'52	Rotation bâton		
B'53	Parallélogramme divisé par 2		
C ₇	B 44	Alternance convexe, concave, nombre somme	
	B'51	Homothétie centre trait, rapport -2	
	B'55	Thalès milieu	
	B'56	Thalès thiers	
	B'45	Centre de symétrie	
	B'46	Axes de symétrie	
	B'48	Polygones convexes	
B'49	Bipoints équipollents, translation		
C ₈	E 78	Eval. longueur segment horizontal	
	E 79	Eval. longueur segment oblique	
	E 80	Eval. longueur segment dans carré	
	E 81	Eval. longueur segment diam. cercle	
	E 82	Eval. longueur ligne brisée	
	E 83	Eval. longueur demi cercle	
	E 84	Eval. longueur segments + quart cercle	
	E 86	Longueur et largeur rectangle	
E 88	Longueur cigarette gauloise ordinaire		

E83 et E84 concernant l'évaluation de la longueur d'un arc de courbe ; enfin, E86 et E83 exigent une mémorisation d'une information recueillie.

5. CONCLUSION.

De façon très globale, l'application de nos algorithmes de classification a permis de réorganiser les différents items selon les principales notions mathématiques sous jacentes au questionnaire et cela, à partir, exclusivement, du comportement réel des enfants. Les principales formes d'aptitude correspondent donc aux principaux thèmes mathématiques. Il y a donc une vérité fondamentale lorsqu'un enfant assure qu'il est plutôt meilleur dans tel ou tel chapitre des mathématiques. D'autre part, les associations entre agrégats de variables provenant de cahiers distincts conduit à s'interroger sur la valeur cognitive de certains items. Ces associations (qui se produisent par exemple entre une partie du cahier B' est une partie du cahier E concernant l'évaluation des longueurs, entre une partie du cahier C et une partie du cahier E concernant l'évaluation des aires, entre quelques items de B et une classe d'items de A) montrent des rapprochements insoupçonnés dans le comportement mathématique des enfants entre des questions que le mathématicien aurait sans doute séparées de façon essentielle.

La séparation de chacune des grandes classes en sous classes s'est effectuée de façon conforme aux différents niveaux d'une taxinomie en objectis cognitifs proposée par Gras qui s'inspirait de l'interprétation de Bruner de la théorie de développement de Piaget (cf. § 2). A ce sujet, le regroupement des équations et des suites logiques relevant de la même complexités opératoire est claire dans l'arbre des classifications (réunion de C_4 à C_5). L'existence de carrefours, où la notion de niveau d'acquisition ou de complexité opératoire sont dominantes, affaiblit considérablement l'effet du hasard dans le choix de la réponse du sujet ; effet dont l'importance a pu être redouté et qui n'a pas affecté sensiblement la structure hiérarchique.

Cette étude reprend en fait, à un niveau national, celle (cf.[3]) sur un échantillon neuf fois plus réduit, à partir du même test, où on avait obtenu une classification conforme dans ses grandes lignes à celle que nous venons de présenter ci-dessus. Toutefois, la partition considérée ici est certainement plus nette et d'interprétation plus claire, en raison sans doute de l'effectif de l'échantillon et, dans une moindre mesure, de l'absence de variables contingentes au test, telles que les modalités d'identité scolaire qui avaient été introduites dans le tableau des données de l'expérience précédente.

6. DEVELOPPEMENTS : "LES GRAPHES D'IMPLICATION".

A partir du résultat très encourageant de cette étude et relativement aux éléments intrinsèques de la complexité dans l'enseignement des Mathématiques, l'auteur de la recherche didactique a voulu directement mettre en évidence sur un ensemble de comportements à un ensemble d'items, une structure formée d'enchaînements successifs où le long d'une même chaîne, la complexité varie de façon strictement monotone. L'élaboration d'une telle structure définie par un ordre partiel et représentée par un graphe orienté, passe par la définition d'un indice non plus de "ressemblance" ; mais, d'"implication", qui a un caractère essentiellement dissymétrique. Comme l'indice de proximité, celui d'implication sera également établi par rapport à une hypothèse d'absence de lien (h.a.l.), respectant d'une

"certaine façon" les caractéristiques de cardinalité. Nous avons repris dans [8] l'indice proposé en premier par Gras (cf. [7]) qui se référait à une h.a.l. à caractère binomial et nous avons été conduits à proposer les deux indices suivants :

$$Q_p(a, \bar{b}) = \frac{n(a \wedge \bar{b}) - n(a)n(\bar{b})/n}{\sqrt{n(a)n(\bar{b})/n}} \quad (1)$$

et

$$Q_p(\bar{a}, b) = \frac{n(\bar{a} \wedge b) - n(\bar{a})n(b)/n}{\sqrt{n(\bar{a})n(b)/n}} \quad (2)$$

avec des notations usuelles (cf. chap. 2 § IV 1.5, partie I): (a, b) est un couple quelconque de $A \times A$ où A est l'ensemble des attributs - comportements établis en interrogeant un ensemble E de sujets.

Pour des raisons techniques (notamment $Q_p(\bar{a}, b) < Q_p(a, \bar{b})$ dès que $n(a) < n(b)$), on peut être amené à centrer et à réduire globalement chacun des deux indices sur l'ensemble

$$G = \{(a, b) \in A \times A / n(a) < n(b) \text{ et } n(a \wedge \bar{b}) \neq 0\} \quad (3)$$

La relation d'ordre partiel R , associée à l'indice $Q_p(a, \bar{b})$, est définie par

$$(\forall (a, b) \in A \times A), a R b \Leftrightarrow \begin{cases} E(a) \subseteq E(b) & \text{ou} \\ n(a) \leq n(b) \text{ et } \psi[Q_p(a, \bar{b})] \geq \psi_0 \end{cases} \quad (4)$$

où $\psi = (1 - \phi)$ et où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Définition analogue pour la relation d'ordre associée à $Q_p(\bar{a}, b)$ qui est au préalable réduit globalement (cf. [8]).

La méthode de construction des graphes associés aux relations est heuristique ; on se propose de l'automatiser dans un proche avenir (cf. [8]).

L'évaluation statistique du graphe "discret" (4) ainsi d'ailleurs que du graphe "pondéré" suivant

$$\{\psi[Q_p(a, \bar{b})] / (a, b) \in A \times A \text{ et } n(a) \leq n(b)\} \quad (5)$$

qui a donné naissance au précédent graphe, se fait au moyen d'un indice très général de comparaison entre deux relations pondérées sur un même ensemble (cf. chap. 2 § IV. 5 partie I et [8]).

Pour cerner la comparaison entre la taxinomie (représentée par un pré-ordre total sur l'ensemble des items) et un même graphe d'implication tel que (4) ; il est naturel de vouloir se limiter à un seul concept. Celui choisi par le chercheur est le concept de symétrie centrale (enseigné en classe de 4ème des Collèges d'Enseignement Secondaire) par rapport auquel on construit un questionnaire à 40 items (cf. [7]) ; chacun de ceux-ci étant sensé illustrer une capacité exprimée dans une classe donnée de la taxinomie. Mais cette opérationnalisation demeure subjective et ce n'est donc qu'en toute hypothèse qu'on peut dire que le questionnaire réalise les différents aspects de la taxinomie.

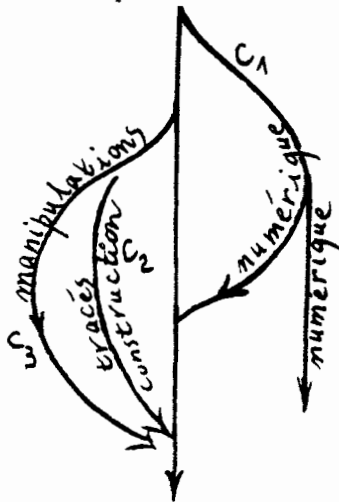
Ce questionnaire a été subi par un échantillon formant un ensemble de 401 élèves. Nous renvoyons à [7] pour le détail des questions à [7] et [8] pour l'analyse statistique. Nous nous contenterons ici de reprendre hâtivement les conclusions de [8] quant à la comparaison des deux graphes discrets d'implication H_1 et H_2 , respectivement associés aux indices

$Q_p(a, \bar{b})$ et $Q_p(\bar{a}, b)$.

L'analyse sommaire de H_1 montre que :

1) Les sources du graphe (i.e. sommets n'ayant pas d'antécédents) correspondent, à l'exception de deux items, à des niveaux supérieurs de la taxinomie, soient δ ou η . Les puits du graphe (i.e. sommets n'ayant pas de successeurs) correspondent à des niveaux inférieurs de la taxinomie, soient α ou β . La taxinomie est généralement décrite dans l'ordre décroissant le long de chaque chaîne de H_1 .

2) Shématiquement trois chaînes C_1, C_2 et C_3 se développent de façon indépendante :



C_1 correspond à des tâches de nature numérique,
 C_2 à des tâches de construction et
 C_3 à des tâches prenant appui sur la manipulation.

La jonction entre C_1 et C_2 se fait en un item dont la résolution fait appel à des tâches de nature algorithmique (comme le long de C_1) et géométrique (comme le long de C_2 et C_3).

Ainsi, H_1 restitue convenablement la taxinomie, ce qui réciproquement renforce sa crédibilité, tout en mettant en évidence l'éclatement des opérations mentales en 2 catégories suivant qu'elles se nourrissent de contenus algébriques ou géométriques. C'est une dimension qui apparaît dans la taxinomie de Guilford (1967) (cf. dans [9]) à caractère multidimensionnel, intégrant des facteurs tels que contenus et opérations mentales ; mais, trop lourde d'emploi.

La construction de H_2 montre que :

1) Comme dans H_1 , les sources (resp. les puits) sont constitués des items relevant des niveaux supérieurs (resp. inférieurs) de la taxinomie, à quelques exceptions près.

2) L'ordre taxinomique n'est pas plus infirmé dans H_2 que dans H_1 et les grandes sous structures révélées par C_1, C_2 et C_3 demeurent en place. Cependant ces chaînes peuvent comporter quelques items non exactement conformes à la nature de la tâche mais s'insérant de façon plus précise quant à l'ordre des fréquences de réussite.

Reprenons ici les situations (i) et (ii) introduites par I.C. Lerman dans [8] (§ III.1), relativement à l'implication $a \Rightarrow b$.

(i) le processus mental nécessaire à la solution de la question b est implicite pour résoudre la question a ; en d'autres termes, est un des composants de la solution de a.

(ii) le degré de complexité de la tâche a est sensiblement plus grand que celui de la tâche b, sans que nécessairement le processus mental nécessai-

re à l'exécution de la tâche b se retrouve dans celle a.

Formulons alors une hypothèse qui mérite de rechercher sa validation à travers d'autres études comme celle-ci.

- $Q_p(a, \bar{b})$ semble être un indicateur de i) : en effet, s'il reste par construction sensible à la complexité, c'est la nature des tâches et, par suite, les démarches intellectuelles, les processus de réalisations à travers les contenus qui infléchissent la structure de l'arbre que nous lui associons.

- $Q_p(\bar{a}, b)$ rend davantage compte de ii) en se présentant comme un très bon indicateur des faibles variations de complexité, donc de la finesse d'emboîtement de grandes classes de complexité :

Nous allons nous attacher dans l'avenir à éprouver cette hypothèse qui, si elle se confirmait, donnerait un statut spécifique aux deux formes d'indices dans l'analyse didactique et justifierait, s'il en était besoin, leur coexistence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ARCHAMBAUD, "Le rôle du langage dans le développement cognitif selon J.S. Bruner". Bulletin de Psychologie, décembre 1975.
- [2] B. BLOOM et collab. In : Education Nouvelle, "Taxinomie des objectifs pédagogiques (T1 : domaine cognitif 1969 , T2 : domaine affectif 1970)".
- [3] R. GRAS, "Recherche d'une taxonomie d'objectifs cognitifs à un test d'entrée en 4^e expérimentale." (O.C.P. en sept. 1974), I.R.E.M. Rennes, mai. 1975.
- [4] R. GRAS, "Recherche d'une taxonomie d'objectifs cognitifs en mathématiques". I.R.E.M. Rennes, janvier 1976.
- [5] R. GRAS, "Analyse factorielle et classificatoire d'un test national d'entrée en 4^e (Mathématiques)." I.R.E.M., Rennes, mai 1976.
- [6] R. GRAS, "Test sur la connaissance du concept de symétrie centrale". I.R.E.M. Rennes, juin 1976.
- [7] R. GRAS, "Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques". Thèse d'Etat, Université de Rennes I - Oct. 1979.
- [8] I.C. LERMAN, R. GRAS, H. ROSTAM, "Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires", Rapport I.R.I.S.A. 136. A paraître dans Rev. Math. et Sc. Hum. en 1981.
- [9] Y. TOURNEUR, "Classification des questions d'évaluation en mathématiques" et "Taxonomie des objectifs cognitifs en mathématiques : étude du modèle N.L.S.M.A." (Mathematica et Paedagogia nos 56 et 57, 1972).