

Algorithmes d'affectation en reconnaissance des formes

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de reprendre ici l'analyse de deux nouveaux problèmes d'affectation qu'étudie A. Checroun dans sa thèse (cf. [6] et [7]). Cette analyse nous conduira à une expression plus globale de la nature des problèmes posés ainsi qu'à des algorithmes rapides ayant un caractère systématique et optimal. Ces problèmes se posent d'autre part dans la reconnaissance l'homologie entre deux caractères taxinomiques. (cf. [11] chap. 3).

Le premier problème consiste à déterminer une bijection entre deux ensembles A et B dont chacun est formé de n points du plan R^2 . Cette bijection doit permettre la "meilleure" affectation dont la qualité doit être indépendante d'une homothétie ou déplacement portée sur l'une ou l'autre des deux configurations géométriques A ou B.

On cherche dans le second problème à détecter dans une configuration B formée de n points, les sous figures de m points chacune, équivalentes d'un certain point de vue géométrique à une configuration donnée A de m points ($m < n$). Cette équivalence peut par exemple être définie de telle sorte que deux figures, se déduisant l'une de l'autre par le produit d'une projection conique et d'une homothétie, soient dans une même classe.

Les deux problèmes prennent vite une forme combinatoire dont la solution peut mettre en oeuvre un algorithme de recherche de tous les systèmes de représentants distincts (S.D.R.) d'une famille finie d'ensembles finis. Nous développons en annexe cet algorithme ainsi qu'une forme particulière de celui du problème général d'affectation, laquelle intervient dans le premier problème ; en nous inspirant de Jr. Marshall Hall (cf. [4], chap. 7).

Cette annexe a son intérêt propre ; en effet outre cet algorithme de recherche de tous les SDR que nous appliquons d'ailleurs à la découverte d'un isomorphisme entre deux graphes, on y trouvera une démonstration algorithmique du vieux théorème de Philip Hall.

Le premier problème sera étudié au paragraphe II et le second au paragraphe III.

II - ETUDE DU PREMIER PROBLEME

1. INTRODUCTION

Nous commencerons par exprimer l'approche de ce problème tentée par J.C. Simon, A. Checroun et C. Roche (cf.[6]).

Rappelons que si C_2 désigne l'ensemble des paires de points distincts d'un ensemble C de n points du plan R^2 , l'ordonnance $\omega(C)$ est l'ordre total sur C_2 pour lequel une paire p précède une paire q ($p < q$) si les deux sommets composant p sont plus voisins que ceux composant q . Il est clair que si $C' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_n\}$ est l'image de $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ par une similitude où c'_i est l'image de c_i , $\omega(C')$ se déduit de $\omega(C)$ en remplaçant chaque paire de sommets $\{c_i, c_j\}$ par son image $\{c'_i, c'_j\}$. Réciproquement, les résultats expérimentaux de R.N. Shepard suivis des théorèmes à caractère probabiliste de J.P. Benzecri (cf.[5] et [1]) montrent que (pour n grand) si C et C' sont deux configurations géométriques dans un même espace R^p et si $\omega(C')$ se déduit de $\omega(C)$ en remplaçant c_j par $\tau(c_j)$ pour une bijection τ de C sur C' ; alors on peut admettre que C' se déduit de C par un déplacement, une homothétie et une petite déformation. Il en résulte que l'affectation de B sur A doit respecter au mieux le système des inégalités entre les distances des points de A pris deux par deux. Posons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$; A_2 (resp. B_2) désignera l'ensemble des parties à deux éléments de A (resp. B), $\omega(A)$ (resp. $\omega(B)$) l'ordonnance associée par la distance euclidienne. L'affectation sera représentée par une permutation τ de $\{1, 2, \dots, n\}$ pour laquelle $b_{\tau(i)}$ sera attribué à a_i . Dans la mesure où il n'existe pas de permutation τ pour laquelle l'image de $\omega(A)$ est $\omega(B)$, les auteurs précités définissent sur $\omega(B)$ une suite d'intervalles empiétant dont chacun est formé d'une séquence de paires telle que si $\{b_i, b_j\}$ et $\{b_k, b_h\}$ appartiennent à un même intervalle

$$|d(b_i, b_j) - d(b_k, b_h)| \leq \epsilon, \text{ où } d \text{ est la distance ;}$$

dans ces conditions, une affectation est ϵ -possible s'il existe τ telle que pour toute paire d'indices $\{i, j\}$, la paire $\{b_{\tau(i)}, b_{\tau(j)}\}$ se trouve dans le même intervalle de $\omega(B)$ que celle de même rang que $\{a_i, a_j\}$. ϵ augmentant à partir de 0, cette affectation d'abord impossible devient possible à partir d'un certain ϵ_1 , puis indéterminée à partir de ϵ_2 ; dans certains cas on passe directement de l'impossibilité à l'indétermination ($\epsilon_1 = \epsilon_2$).

Remarquons d'abord que la valeur de ϵ_2 ne peut tenir lieu d'une "bonne" mesure de la ressemblance entre les deux configurations géométriques A et B puisque cette dernière dépend de l'échelle (homothétie). De plus ce n'est pas la différence des rangs entre deux paires de B_2 qui permet de les mettre dans un même intervalle de ceux définis sur $\omega(B)$ mais celle entre les deux longueurs de chacun des segments que définit chacune des paires. On peut certes adapter l'algorithme proposé par les auteurs en donnant à ϵ des valeurs entières; un même intervalle de $\omega(B)$ serait formé de ϵ élé-

ments de B_2 se succédant. Mais nous préférons repenser le problème à un niveau plus global de la comparaison de $\omega(B)$ et de $\omega(A)$. Le critère le plus adapté, permettant de juger la qualité d'une affectation, est établi à partir de la définition suivante d'une distance sur l'ensemble O des ordres totaux sur un même ensemble fini E :

$$d : O^2 \longrightarrow N$$

$$(O, O') \longrightarrow d(O, O') = \text{card}(\text{gr}(O) \Delta \text{gr}(O'))$$

où le second membre désigne le cardinal de la différence symétrique entre les graphes, définis dans $E \times E$, des deux ordres totaux O et O' ; on rappelle que $\text{gr}(O) = \{(x, y) / (x, y) \in E^2 \text{ et } x < y \text{ pour } O\}$. Ce cardinal est exactement le double du nombre d'inversions $\nu(O, O')$ que présente l'un des ordres totaux par rapport à l'autre.

Dans ces conditions la valeur d'une affectation τ , pour laquelle $b_{\tau(i)}$ est attribué à a_i , sera mesurée par la petitesse de $\nu(\omega(A), \omega_{\tau}(A))$ (1), qu'on montre aisément être identique à $\nu(\omega(B), \omega_{\tau}(B))$ où $\omega_{\tau}(A)$ (resp. $\omega_{\tau}(B)$) est l'ordre total sur A_2 (resp. sur B_2) obtenu en remplaçant dans $\omega(B)$ (resp. $\omega(A)$), $b_{\tau(i)}$ par a_i (resp. $a_{\tau^{-1}(j)}$ par b_j).

Cependant il n'existe pas d'algorithme général permettant d'obtenir la solution optimale au sens du critère (1) sans que cet algorithme ait à envisager les $n!$ affectations possibles. On peut proposer un algorithme qui a un caractère local qui permet d'aboutir à une "bonne" solution ; sans doute une des meilleures s'il existe une relative bonne affectation. Ce sera notre seconde approche ; la première résultera de notre tentative de considérer ce problème dans le cadre général du problème d'affectation en introduisant un critère qui se présentera sous la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(a_i, b_{\tau(i)}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta(a_{\tau^{-1}(j)}, b_j) \quad (2)$$

où $\delta(a_i, b_j)$ est la distorsion constatée au niveau de $\omega(B)$ par rapport à $\omega(A)$ dans l'attribution de b_j à a_i . On justifiera statistiquement le caractère additif d'un critère ayant la forme (2) ci-dessus pour lequel il existe une solution optimale pouvant être obtenue en un petit nombre de pas (cf. annexe). Mais on se rendra compte expérimentalement que cette affectation optimale pour (2) ne correspondra à une bonne affectation du point de vue du premier critère que s'il existe a priori une assez bonne affectation ; d'où l'intérêt de la seconde approche, ci-dessus signalée, par un algorithme local mais visant directement le critère (1).

2. ANALYSE D'UN CRITERE DE LA FORME (2)

2.1. Mesure de la distorsion résultant de l'affectation d'un sommet

L'affectation du sommet b_j de B à celui a_i de A sera jugée d'autant meilleure que de b_j on "voit" les autres points de la configuration B de façon plus semblable à celle dont on "voit" à partir de a_i les autres som-

ments de A ; ce jugement devant s'appuyer sur la comparaison entre $\omega(B)$ et $\omega(A)$. Associons par conséquent à a_i (resp. à b_j) la suite des sommets de A (resp. de B) rangés par éloignement croissant à a_i (resp. à b_j) ; on désignera par $i(k)$ (resp. $j(k)$) l'indice du kème point de A (resp. de B) par éloignement relatif à a_i (resp. à b_j). Il suffit de considérer la restriction de $\omega(A)$ à $A_i = \{a_i, a_{i(k)} / 1 \leq k \leq n-1\}$ et celle de $\omega(B)$ à $B_j = \{b_j, b_{j(k)} / 1 \leq k \leq n-1\}$ pour obtenir chacune des deux suites $(i(k))$ et $(j(k))$, $1 \leq k \leq (n-1)$.

Attachons à a_i (resp. à b_j) la suite des rangs des paires de A_i (resp. de B_j) selon $\omega(A)$ (resp. $\omega(B)$) ; à savoir $(r(a_i, a_{i(k)}) / 1 \leq k \leq n-1)$, respectivement $(s(b_j, b_{j(k)}) / 1 \leq k \leq n-1)$. L'adéquation dans l'affectation de b_j à a_i serait parfaite si les deux suites sont identiques ; c'est-à-dire si

$$r(a_i, a_{i(k)}) = s(b_j, b_{j(k)}) \text{ pour tout } k=1, 2, \dots, (n-1);$$

sinon, la mesure de la distorsion dans l'affectation de b_j à a_i sera la valeur d'une distance entre les deux vecteurs de $N^{(n-1)}$ que définissent les deux distributions de rangs. On peut proposer

$$\delta_1(a_i, b_j) = \sum_{1 \leq k \leq (n-1)} |r(a_i, a_{i(k)}) - s(b_j, b_{j(k)})|$$

ou bien

$$\delta_2(a_i, b_j) = \sum_{1 \leq k \leq (n-1)} \{r(a_i, a_{i(k)}) - s(b_j, b_{j(k)})\}^2;$$

dans ces conditions, l'affectation de b_j à a_i est jugée dans ce qu'elle implique quant à la distribution des rangs des segments définis dans A dont l'un des sommets est a_i , par rapport à la distribution des rangs des segments définis dans B et dont l'une des extrémités est b_j .

Nous préférons la mesure δ_2 de la distorsion ; car relativement à deux affectations ponctuelles b_j à a_i et b_j à a_l , pour lesquelles δ_1 prend la même valeur, δ_2 taxe davantage celle pour laquelle la distribution des valeurs de $|r(a_i, a_{i(k)}) - s(b_j, b_{j(k)})|$ est plus dispersée ; cette condition semblant intuitivement souhaitable.

2.2. Mesure de la distorsion résultant de l'affectation de l'ensemble de la configuration

Conformément à la formule (2) de l'introduction on propose

$$D(\tau) = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta_2(a_i, b_{\tau(i)});$$

expression que nous allons globalement analyser.

PROPRIÉTÉ 1. Si $D(\tau) = 0$, alors $b_{\tau(i(k))} = b_{\tau(i)}(k)$ pour tout (i, k) .

On associe à l'affectation ponctuelle du sommet b_j de la configuration

B à celui a_i de A, l'affectation de l'ensemble des points B à celui A définie par l'attribution de $b_j(k)$ à $a_{i(k)}$ pour $k=1,2,\dots,(n-1)$; c'est-à-dire en respectant l'éloignement relatif à a_i (resp. b_j). La propriété ci-dessus est une propriété de compatibilité qui exprime que les n affectations globales associées à celles ponctuelles de $b_{\tau(i)}$ à a_i sont identiques à celle définie par τ .

En effet ; $D(\tau) = 0 \Rightarrow r(a_i, a_{i(k)}) = s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)})$ pour tout i . La paire $\{a_i, a_{i(k)}\}$ a par rapport à $\omega(A)$ même rang qu'une paire de B_2 dont l'une des composantes est $b_{\tau(i)}$, par rapport à $\omega(B)$. De même $\{a_{i(k)}, a_i\}$ a par rapport à $\omega(A)$ même rang qu'une paire de B_2 , par rapport à $\omega(B)$, dont l'une des composantes est $b_{\tau(i)(k)}$. Il en résulte que la paire de même rang que $\{a_i, a_{i(k)}\}$ est nécessairement $\{b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)}\}$ et

$$s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)}) = s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)})$$

qui implique

$$b_{\tau(i)(k)} = b_{\tau(i)(k)}$$

C.Q.F.D.

A chaque sommet a_i de la configuration A, respectivement b_j de B, associons le rang $r(a_i, a_{i(k)})$, respectivement $s(b_j, b_{j(k)})$ et considérons les deux distributions de nombres entiers obtenues :

$$\{r(a_1, a_{1(k)}), r(a_2, a_{2(k)}), \dots, r(a_n, a_{n(k)})\}$$

et

$$\{s(b_1, b_{1(k)}), s(b_2, b_{2(k)}), \dots, s(b_n, b_{n(k)})\},$$

pour k donné.

A la permutation τ qui définit l'affectation associons le produit scalaire des deux vecteurs $(r(a_i, a_{i(k)}) / 1 \leq i \leq n)$ et $(s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)}) / 1 \leq i \leq n)$; soit

$$P(\tau, k) = \sum_{1 \leq i \leq n} r(a_i, a_{i(k)}) s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)}) ;$$

l'ensemble des valeurs de $P(\tau, k)$, pour τ décrivant l'ensemble des $n!$ permutations de $(1, 2, \dots, n)$, est une distribution de permutation dont la tendance limite a été étudiée par A. Wald et J. Wolfowitz (cf. [8]). $P(\tau_0, k)$ peut être considéré comme une mesure de l'adéquation de l'affectation que définit τ_0 d'un point de vue local que nous pouvons appeler "éloignement relatif d'ordre k " ; de ce point de vue l'ajustement est d'autant meilleur que $P(\tau, k)$ est plus élevé.

PROPRIETE 2. τ et σ étant deux permutations de $(1, 2, \dots, n)$

$$D(\tau) < D(\sigma) \Leftrightarrow \sum_{1 \leq k \leq (n-1)} P(\tau, k) > \sum_{1 \leq k \leq (n-1)} P(\sigma, k)$$

En d'autres termes, le critère $D(\tau)$ est équivalent à celui défini par la moyenne par rapport à k de $P(\tau, k)$.

L'inégalité du premier membre se met sous la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq (n-1)} \{r(a_i, a_{i(k)}) - s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)})\}^2 < \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq (n-1)} \{r(a_i, a_{i(k)}) - s(b_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)(k)})\}^2$$

En remarquant que

$$\sum_{1 \leq k \leq (n-1)} \{s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)})\}^2 = \sum_{1 \leq k \leq (n-1)} \{s(b_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)(k)})\}^2$$

et en inversant les deux signes sommes, on obtient le résultat.

Si nous avons pu donner un sens statistique ou critère $D(\tau)$, son sens algébrique reste peu clair. Il est donc important dans les études comparatives, une fois obtenue l'affectation τ_0 minimisant $D(\tau)$, d'accompagner $D(\tau_0)$ de la valeur $I(\tau_0) = v(\omega(A), \omega_{\tau}(A))$ du nombre d'inversions que présente $\omega(A)$ par rapport à $\omega_{\tau}(A)$ qui, rappelons le, est l'ordre sur A_2 obtenu en remplaçant dans $\omega(B)$, $b_{\tau(i)}$ par a_i ; (cf. exemples ci-dessous).

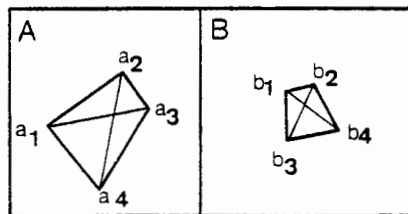
2.3. Exemples d'application

Le point de départ du premier algorithme d'affectation est la matrice carrée $n \times n$ dont l'ensemble des lignes est indexé par A et celui des colonnes par B ; à l'intersection de la ligne représentant le sommet a_i de A et de la colonne représentant le sommet b_j de B , on pose le nombre

$\alpha_{ij} = \delta_{\epsilon}(a_i, b_j)$ où $\epsilon = 1$ ou 2 selon la mesure choisie de la distorsion. Rappelons qu'il s'agit de trouver la permutation τ de $(1, 2, \dots, n)$ pour laquelle est minimum

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i\tau(i)}$$

Illustrons le chargement de la matrice (α_{ij}) dans le cas de l'exemple de la note citée (cf. [6])



$\omega(A)$ et $\omega(B)$ sont respectivement définis par

$$a_2 a_3 < a_1 a_4 < a_1 a_2 < a_1 a_3 < a_3 a_4 < a_2 a_4,$$

$$b_1 b_2 < b_1 b_3 < b_3 b_4 < b_2 b_4 < b_2 b_3 < b_1 b_4 ;$$

où $a_i a_j$ (resp. $b_i b_j$) représente la paire $\{a_i, a_j\}$ (resp. $\{b_i, b_j\}$).

Les suites $(r(a_i, a_{i(k)}) / 1 \leq k \leq (n-1))$ pour $i=1, 2, \dots, n$; sont ici où $n=4$: (2,3,4) ; (1,3,6) ; (1,4,5) ; (2,4,6).

Les suites $(s(b_j, b_{j(k)}) / 1 \leq k \leq (n-1))$ pour $j=1, 2, \dots, n$; sont (1,2,6) ; (1,4,5) ; (2,3,5) ; (3,4,6).

Les deux matrices (α_{ij}) associées respectivement à δ_1 et δ_2 sont

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	4	3	1	4
a_2	1	2	2	3
a_3	3	0	2	3
a_4	4	3	3	2

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	6	3	1	6
a_2	1	2	2	5
a_3	5	0	2	5
a_4	10	3	5	2

Pour chaque indice i de ligne, il existe ici un seul indice $\gamma(i)$ de colonne pour lequel $\alpha_{i\gamma(i)}$ est le plus petit nombre de la ligne i ; de plus

$$(\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \gamma(4)) = (3, 1, 2, 4)$$

est une permutation de (1,2,3,4). Dans ces conditions, γ définit l'affectation uniformément optimale puisque

$$\alpha_{i\gamma(i)} = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} \quad \text{pour tout } i.$$

Dans l'exemple considéré, l'affectation optimale attribuée respectivement aux sommets a_1, a_2, a_3, a_4 de la configuration A, les sommets b_3, b_1, b_2, b_4 de B. $D(\gamma)$ vaut ici 4 que l'on choisisse Δ_1 ou Δ_2 .

La mesure $I(\gamma)$ à laquelle nous faisons allusion à la fin du paragraphe précédent est le nombre d'inversions entre les deux ordres totaux suivants sur A_2 ;

$$\{a_2, a_3\} < \{a_1, a_4\} < \{a_1, a_2\} < \{a_1, a_3\} < \{a_3, a_4\} < \{a_2, a_4\} : \omega(A)$$

$$\{a_2, a_3\} < \{a_1, a_2\} < \{a_1, a_4\} < \{a_3, a_4\} < \{a_1, a_3\} < \{a_2, a_4\} : \omega^t(A)$$

soit $I(\gamma) = 2$; en effet, $(\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_4\})$ et $(\{a_1, a_3\}, \{a_3, a_4\})$ sont les seuls couples d'éléments de A_2 à présenter une inversion.

Si on ne peut construire une telle application γ qui définit une permutation τ , il faut faire appel à l'algorithme d'affectation dans toute sa généralité que nous exprimons dans le cadre d'un théorème qui fait appel à un algorithme permettant d'établir tous les systèmes de représentants distincts d'une famille finie d'ensembles finis (cf. annexe où nous nous inspirons de [4]). Nous illustrons l'application de ce théorème avec le tableau des nombres α_{ij} suivant

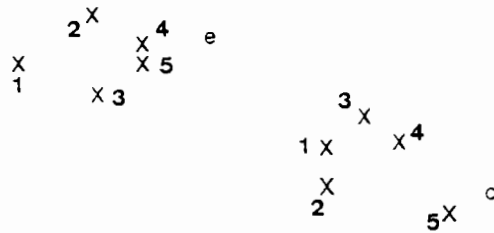
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	86	48	60	66	4
e_2	10	6	2	2	38
e_3	21	7	9	3	31
e_4	2	24	4	14	68
e_5	1	19	5	7	67

qui est le tableau des valeurs de la distorsion $\delta_2(a_i, e_j)$, obtenu à partir des deux ordonnances

$$e_4 e_5 < e_2 e_4 < e_3 e_5 < e_2 e_5 < e_3 e_4 < e_2 e_3 < e_1 e_3 < e_1 e_2 < e_1 e_5 < e_1 e_4$$

$$a_1 a_2 < a_3 a_4 < a_1 a_3 < a_1 a_4 < a_4 a_5 < a_2 a_3 < a_2 a_4 < a_2 a_5 < a_3 a_5 < a_1 a_5$$

qui sont respectivement associées aux deux configurations suivantes :



On obtient (cf. annexe) deux solutions optimales équivalentes pour le critère $D(\tau)$; elles sont respectivement définies par les permutations $\tau_1=(5,2,4,3,1)$ et $\tau_2=(5,4,2,3,1)$ qui expriment les deux affectations suivantes de la configuration $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sur $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$:

$$\begin{array}{cccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & ; & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
 \uparrow & & & & & & \uparrow & & & & \\
 a_5 & a_2 & a_4 & a_3 & a_1 & & a_5 & a_4 & a_2 & a_3 & a_1
 \end{array}$$

Les deux affectations ne diffèrent que par une inversion concernant les deux extrémités du segment $a_2 a_4$. Pour déterminer la meilleure des deux il reste à les comparer du point du premier critère.

Posons $I(\tau_i) = v(\omega(A), \omega_{\tau_i}(A))$; $i=1$ ou 2 . Les ordonnances $\omega_{\tau_1}(A)$ et $\omega_{\tau_2}(A)$ sont respectivement

$$a_1 a_3 < a_2 a_3 < a_1 a_4 < a_1 a_2 < a_3 a_4 < a_2 a_4 < a_4 a_5 < a_2 a_5 < a_1 a_5 < a_3 a_5$$

$$a_1 a_3 < a_3 a_4 < a_1 a_2 < a_1 a_4 < a_2 a_3 < a_2 a_4 < a_2 a_5 < a_4 a_5 < a_1 a_5 < a_3 a_5$$

Pour effectuer le calcul de $I(\tau)$, on représentera $\omega_t(A)$ par la suite des rangs calculés selon ω des éléments de A_2 rangés selon ω_t ; ainsi $\omega_{\tau_1}(A)$ sera représentée par la suite des entiers (3,6,4,1,2,7,5,8,10,9) où par exemple la paire $a_1 a_4$, la 3^e pour ω_t a été représentée par 4 qui est son rang pour ω . $I(\tau_1)$ est alors le nombre d'inversions que présente la permutation qu'on vient d'établir; ce nombre s'obtient par la formule

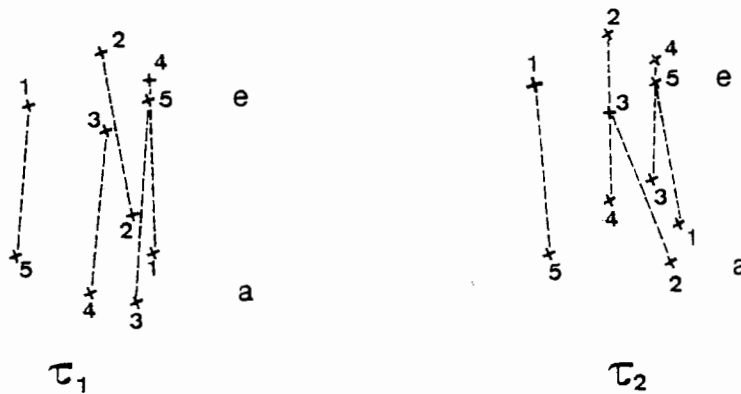
$$\sum_{2 \leq i \leq 15} g(i)$$

où $g(i)$ est le nombre de composantes du vecteur, défini par la permutation, supérieures à la i ème situées à sa gauche; $I(\tau_1) = 1+3+3+2+1 = 10$.

De même $\omega_{\tau_2}(A)$ sera représentée par la suite des entiers

(3,2,1,4,6,7,8,5,10,9); d'où $I(\tau_2) = 1+2+3+1 = 7$.

Par conséquent, l'affectation définie par τ_2 est préférable à celle définie par τ_1 .



Pour représenter l'affectation définie par τ_2 , il a été nécessaire de faire subir à la configuration a une symétrie par rapport à une droite de son plan; ce qui correspond à "retourner" le plan de la figure. L'ordonnance est évidemment invariante par cette transformation géométrique qui est une rotation dans l'espace à 3 dimensions. En considérant la fermeture convexe de chacune des deux configurations a et e; on remarque que l'affectation τ_2 respecte l'ordre de rencontre des sommets de la configuration en parcourant dans un sens donné la ligne polygonale: frontière de la fermeture convexe. D'ailleurs si on remplace l'affectation τ_1 par l'affectation voisine τ'_1 :

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \updownarrow & & & & \\ a_5 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \end{matrix}$$

qui respecte l'ordre de rencontre des points sur la ligne polygonale limitant la fermeture convexe. La suite d'entiers représentant $\omega_{\tau'_1}(A)$ est

(3,1,2,6,4,7,5,8,9,10)

dont le nombre d'inversions est égal à

$$v(\omega(A), \omega_{\tau_1}(A)) = 1+1+1+2=5$$

Il semble, comme d'ailleurs cela apparaîtra dans l'application du second algorithme, que le critère $v(\omega, \omega_{\tau})$ est très sensible à la condition qui nous a conduit à remplacer τ_1 par τ'_1 ; il s'agit là d'une bonne qualité de ce critère.

Pour conclure ce paragraphe, on se rend compte que l'algorithme ici en question laisse émerger une "bonne" solution dans le cas où l'une des configurations peut se déduire de l'autre par le produit d'un déplacement et d'une homothétie suivie d'une déformation assez "petite" pour ne pas perturber trop sensiblement l'ordonnance.

3. ALGORITHME VISANT DIRECTEMENT LE PREMIER CRITERE $v(\omega, \omega_{\tau})$

Une faiblesse du critère ci-dessus étudié provient de ce que l'affectation optimale définie par τ entre $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, peut être, dans le cas où B peut difficilement être affectée sur A, bien différente de certaines des affectations résultantes associées aux affectations ponctuelles ; l'affectation résultante associée à l'attribution de $b_{\tau(i)}$ à a_i s'obtient en affectant $b_{\tau(i)(k)}$ à $a_{i(k)}$. Le jugement d'une affectation résultante est d'autant plus sujet à caution que la distribution des rangs $(s(b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)(k)}) / 1 \leq k \leq n-1)$ est plus uniforme ; dans ce cas en effet, "on distingue mal les différences entre les longueurs des segments dont l'une des extrémités est $b_{\tau(i)}$ "

D'où l'algorithme

a) Recueillir un indice j pour lequel la variance de la distribution $(s(b_j, b_{j(k)}) / 1 \leq k \leq n-1)$ est la plus grande ; soit j_0 cet indice pour lequel est maximum la statistique

$$W_j = \frac{1}{(n-1)} \sum_{1 \leq k \leq n-1} \{s(b_j, b_{j(k)}) - \frac{1}{(n-1)} \sum_{1 \leq k \leq n-1} s(b_j, b_{j(k)})\}^2.$$

b) Ranger les sommets a_i ; c'est-à-dire leurs indices, par valeurs décroissantes de la variance V_i de la distribution des rangs :

$(r(a_i, a_{i(k)}) / 1 \leq k \leq n-1)$. Soit (i_1, i_2, \dots, i_n) l'ordre obtenu pour lequel on a, $V_{i_\ell} > V_{i_{\ell+1}}$.

c) Considérer dans l'ordre la suite des affectations résultantes de chacune des affectations ponctuelles : b_{j_0} à a_{i_1} , b_{j_0} à a_{i_2} , ..., b_{j_0} à a_{i_n} ; et calculer pour chacune d'elles la valeur du critère $v(\omega(A), \omega_{\tau}(A))$. On peut se référer à l'exemple précédent où ce calcul a été effectué. Pour déterminer la valeur du critère attachée à l'affectation résultante de l'attribution de b_{j_0} à a_{i_ℓ} , où $b_{j_0(k)}$ se trouve affecté à $a_{i_\ell(k)}$; il y a lieu de déterminer le nombre d'inversions de permutation π de $(1, 2, \dots, n(n-1)/2)$

dont la p^{ème} composante est le rang pour $\omega(A)$ de l'image par l'affectation du segment de B dont le rang est p selon $\omega(B)$; ainsi si τ est la permutation de $(1, 2, \dots, n)$ qui définit l'affectation en question de $b_{\tau(i)}$ à a_i ,

$1 \leq i \leq n$; et si $\{b_j, b_h\}$ est la paire de rang p pour $\omega(B)$, la p^{ème} composante de la permutation à établir est le rang pour $\omega(A)$ de $\{a_{\tau^{-1}(j)}, a_{\tau^{-1}(h)}\}$.

Pour trouver ce rang on peut s'aider d'un tableau carré représentant $A \times A$ où à l'intersection de la ligne indexée par $a_{\tau^{-1}(j)}$ et de la colonne par $a_{\tau^{-1}(h)}$, se trouve le rang de la paire pour $\omega(A)$; un tel tableau est symétrique et sa diagonale sera remplie de zéros.

d) Effectuer un tri sur les valeurs du critère déterminant la meilleure des n affectations précédentes ; il faut s'attendre à ce que la meilleure affectation soit l'une des premières considérées en c).

e) Il s'agit ici de chercher si "autour" de la permutation définissant l'affectation obtenue on ne peut trouver une meilleure. Représentons l'affectation de la façon suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & a_{i_0} & a_{i_0(1)} & a_{i_0(2)} & \cdots & a_{i_0(n-1)} & \\ \uparrow & & & & & & \\ & b_{j_0} & b_{j_0(1)} & b_{j_0(2)} & \cdots & b_{j_0(n-1)} & \end{array}$$

Nous substituerons à cette affectation la suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & a_{i_0} & a_{i_0(1)} & a_{i_0(2)} & \cdots & a_{i_0(n-1)} & \\ \uparrow & & & & & & \\ & b_{j_0} & b_{j_0[\gamma(1)]} & b_{j_0[\gamma(2)]} & \cdots & b_{j_0[\gamma(n-1)]} & \end{array}$$

où $(\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n-1))$ est une permutation de $(1, 2, \dots, n-1)$, qu'on cherchera à évaluer par le critère $v(\omega, \omega_{\tau})$.

Une permutation pouvant se ramener à un produit de transpositions, on considérera les diverses successions de transpositions qui ne perturbent pas trop sensiblement la première affectation, compte tenu des distributions des rangs $(r(a_{i_0}, a_{i_0(k)}))_{0 \leq k \leq n-1}$ et $(s(b_{j_0}, b_{j_0(k)}))_{0 \leq k \leq n-1}$; en effet, une transposition qui intervertirait les affectations des extrémités du segment $a_{i_0(k)} a_{i_0(k+h)}$ semble a priori défavorable puisque dans la constitution de la permutation π de $(1, 2, \dots, n(n-1)/2)$, les deux composantes d'indices respectifs les deux entiers $s(b_{j_0}, b_{j_0(k)})$ et $s(b_{j_0}, b_{j_0(k+h)})$, ont pour valeurs $r(a_{i_0}, a_{i_0(k+h)})$ et $r(a_{i_0}, a_{i_0(k)})$, (cf. c) ci-dessus) ; or

$$s(b_{j_0}, b_{j_0(k+h)}) > s(b_{j_0}, b_{j_0(k)}) + (h-1)$$

et

$$r(a_{i_0}, a_{i_0(k)}) < r(a_{i_0}, a_{i_0(k+h)}) - (h-1)$$

mais ce jugement n'est que local et on ignore ce qui se passe au niveau de toute l'ordonnance.

Une transposition peut être réduite à un produit de transpositions dont

chacune porte sur deux éléments consécutifs ; par conséquent nous établirons toutes les permutations γ , remplissant la condition (σ) ci-dessous, comme une succession de telles transpositions.

La condition (σ) est basée sur l'examen de la suite des rangs

$$(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \dots, \sigma_{(n-1)}) \text{ où } \sigma_{(k)} = s(b_{j_0}, b_{j_0[\gamma(k)]}) ;$$

il s'agit de n'envisager que les γ pour lesquelles

$$(\sigma) \Delta(\gamma) = \sum_{\ell < k} \max(0, \sigma_{(\ell)} - \sigma_{(k)}) < \rho$$

où ρ est un seuil donné.

On y procède de proche en proche à la constitution des différentes permutations γ satisfaisant la condition (σ) . On obtient la première classe de permutations γ en considérant toutes les transpositions portant sur deux éléments consécutifs ℓ et $(\ell+1)$ pour lesquels $\sigma_{(\ell)} - \sigma_{(\ell+1)} < \rho$; une permutation $\gamma^{(1)}$ de cette classe se présente sous la forme

$$(1, 2, \dots, \ell-1, \ell+1, \ell, \ell+2, \dots, n-1).$$

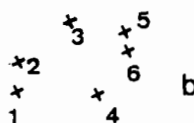
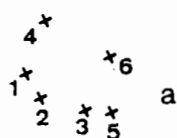
$\gamma^{(1)}$ donnera lieu à une partie de la seconde classe de permutations en considérant $\gamma^{(1)}$ toutes les transpositions de deux éléments consécutifs qui accroissent $\Delta(\gamma)$ en le laissant inférieur à ρ ; l'accroissement se présentant nécessairement sous la forme $\sigma_{(h)} - \sigma_{(h+1)}$. Le processus se poursuit ainsi de suite, une permutation $\gamma^{(q)}$ de la q-ème classe s'obtient à partir de $(1, 2, \dots, n-1)$ par le produit de q transpositions, dont chacune porte sur deux éléments consécutifs et accroît $\Delta(\gamma)$.

Lorsqu'on obtient une permutation γ pour laquelle $\Delta(\gamma) < \rho$, on commence par s'assurer qu'elle n'a pas encore été rencontrée en examinant toutes les permutations de sa classe dont la valeur de Δ est la même ; si la permutation est nouvelle, on évalue l'affectation qu'elle définit au moyen du critère $v(\omega, \omega_t)$; si cette dernière est meilleure que celle dont on est parti (cf. début de e)), on la répertorie.

L'algorithme s'arrête à l'étape q, si toute transposition sur deux éléments consécutifs d'une permutation quelconque $\gamma^{(q)}$ augmente la valeur $\Delta(\gamma^{(q)})$ qui lui est attachée au-delà du seuil ρ . Le processus s'arrête d'autant plus vite que ρ est plus petit. On peut en fait au lieu de se donner ρ , se fixer une limite supérieure au nombre de pas de l'algorithme et étudier l'évolution de $\max \Delta(\gamma)$ pour les différentes permutations γ qu'on a le temps d'examiner.

f) Parmi les affectations répertoriées, retenir la meilleure.

Exemple d'application. Soient les deux configurations de six points chacune,



Les ordonnances respectivement associées sont les suivantes :

$$a_3 a_5 < a_1 a_2 < a_2 a_3 < a_1 a_4 < a_5 a_6 < a_3 a_6 < a_1 a_3 < a_4 a_6 < a_2 a_5 < a_2 a_4 < a_2 a_6 < a_1 a_6 < a_1 a_5 < a_3 a_4 < a_4 a_5$$

$$b_5 b_6 < b_1 b_2 < b_3 b_5 < b_4 b_6 < b_2 b_3 < b_3 b_6 < b_4 b_5 < b_3 b_4 < b_1 b_4 < b_2 b_4 < b_1 b_3 < b_2 b_5 < b_2 b_6 < b_1 b_6 < b_1 b_5$$

Désignons par $D(a_i)$ et $D(b_j)$ les distributions respectives de rangs

$$(r(a_i, a_{i(k)})) / 1 \leq k \leq n-1 \text{ et } (s(b_j, b_{j(k)})) / 1 \leq k \leq n-1$$

On a

$D(a_1) = (2, 4, 7, 12, 13)$	dont la variance	$V(a_1) = 18,64$
$D(a_2) = (2, 3, 9, 10, 11)$	dont la variance	$V(a_2) = 14,00$
$D(a_3) = (1, 3, 6, 7, 14)$	dont la variance	$V(a_3) = 19,76$
$D(a_4) = (4, 8, 10, 14, 15)$	dont la variance	$V(a_4) = 16,16$
$D(a_5) = (1, 5, 9, 13, 15)$	dont la variance	$V(a_5) = 26,24$
$D(a_6) = (5, 6, 8, 11, 12)$	dont la variance	$V(a_6) = 7,44$

D'autre part

$D(b_1) = (2, 9, 11, 14, 15)$	dont la variance	$W(b_1) = 21,36$
$D(b_2) = (2, 5, 10, 12, 13)$	dont la variance	$W(b_2) = 17,84$
$D(b_3) = (3, 5, 6, 8, 11)$	dont la variance	$W(b_3) = 7,44$
$D(b_4) = (4, 7, 8, 9, 10)$	dont la variance	$W(b_4) = 4,24$
$D(b_5) = (1, 3, 7, 12, 15)$	dont la variance	$W(b_5) = 27,84$
$D(b_6) = (1, 4, 6, 13, 14)$	dont la variance	$W(b_6) = 25,84$

Le sommet b_{j_0} dont la distribution $D(b_{j_0})$ a la variance la plus grande est b_5 .

Rangeons les sommets de la configuration a par valeurs décroissantes de la variance $V(a_i)$, on obtient l'ordre suivant

$$a_5 \ a_3 \ a_1 \ a_4 \ a_2 \ a_6$$

Considérons alors dans l'ordre la suite des affectations résultantes de chacune des affectations ponctuelles de

$$b_5 \text{ à } a_5, \ b_5 \text{ à } a_3, \ b_5 \text{ à } a_1, \ b_5 \text{ à } a_4, \ b_5 \text{ à } a_2 \text{ et } b_5 \text{ à } a_6 ;$$

et déterminons pour chacune d'elles, la valeur du critère $v(\omega, \omega_t)$.

1. Affectation résultante de celle de b_5 à a_5 .

L'affectation est représentée de la façon suivante

$$\begin{array}{cccccc} & a_5 & a_3 & a_6 & a_2 & a_1 & a_4 \\ \uparrow & & & & & & \\ & b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

conformément à ce qui a été signalé au début de la partie e) de l'algorithme.

La permutation π , dont le nombre d'inversions définit la valeur du critère $v(\omega, \omega_t)$ (cf. étape c) de l'algorithme), est la suivante

$$(1, 4, 5, 3, 12, 6, 9, 11, 10, 2, 8, 13, 7, 14, 15)$$

dont le nombre d'inversions est

$$0+2+2+1+7+1+3+4+3+0+1+1+0+0=25$$

qui est ici calculé sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq n-1} d(i)$ où $d(i)$ est le nombre de composantes de π à droite de $\pi(i)$ qui lui sont inférieurs.

2. Affectation résultante de celle de b_5 à a_3

$$\begin{array}{cccccc} a_3 & a_5 & a_2 & a_6 & a_1 & a_4 \\ b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

dont π est

$$(1, 4, 3, 5, 2, 9, 6, 11, 8, 12, 10, 7, 13, 15, 14)$$

dont le nombre d'inversions est égal à

$$0+2+1+1+0+3+0+3+1+2+1+0+0+1=15$$

3. Affectation résultante de celle de b_5 à a_1

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 \\ b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

dont la permutation π est

$$(2, 5, 4, 3, 8, 10, 7, 14, 1, 6, 15, 12, 11, 9, 13)$$

dont le nombre d'inversions est égal à

$$1+3+2+1+3+4+2+6+0+0+4+2+1+0=29$$

4. Affectation résultante de celle de b_5 à a_4

$$\begin{array}{cccccc} a_4 & a_1 & a_6 & a_2 & a_3 & a_5 \\ b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

dont la permutation π est

$$(4, 1, 8, 2, 6, 12, 10, 11, 9, 3, 5, 14, 7, 13, 15)$$

dont le nombre d'inversions est égal à

$$3+0+5+0+2+6+4+4+3+0+0+2+0+0=29$$

5. Affectation résultante de celle de b_5 à a_2

$$\begin{array}{cccccc} a_2 & a_1 & a_3 & a_5 & a_4 & a_6 \\ b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

dont la permutation π est

$$(2, 8, 3, 13, 14, 7, 9, 1, 5, 15, 6, 10, 4, 12, 11)$$

dont le nombre d'inversions est égal à

$$1+6+1+9+9+4+4+0+1+5+1+1+0+1=43$$

6. Affectation résultante de celle de b_5 à a_6

$$a_6 \ a_5 \ a_3 \ a_4 \ a_2 \ a_1$$

$$b_5 \ b_6 \ b_3 \ b_4 \ b_2 \ b_1$$

dont la permutation π est

$$(5, 2, 6, 15, 3, 1, 8, 14, 4, 10, 7, 11, 9, 13, 12)$$

dont le nombre d'inversions est égal à

$$4+1+3+11+1+0+2+7+0+2+0+1+0+1=33$$

La meilleure affectation résultante d'une affectation ponctuelle est la seconde ; soit

$$\begin{array}{cccccc} a_3 & a_5 & a_2 & a_6 & a_1 & a_4 \\ \updownarrow & & & & & \\ b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_2 & b_1 \end{array}$$

pour laquelle la valeur du critère $v(\omega(A), \omega_t(A))$ est égale à 15. Attaquons à présent la partie e) de l'algorithme pour chercher si au "voisinage" de cette affectation, il ne se trouve pas une meilleure. Rappelons la distribution $D(b_5) = (1, 3, 7, 12, 15)$ et cherchons les permutations γ qui portent sur la suite $(1, 2, 3, 4, 5)$ des rangs des sommets par éloignement relatif à b_5 .

Si on prend $\rho=6$, on aura à considérer toutes les permutations γ de la première classe qui sont

$$\gamma_1^{(1)} = (2, 1, 3, 4, 5), \quad \gamma_2^{(1)} = (1, 3, 2, 4, 5),$$

$$\gamma_3^{(1)} = (1, 2, 4, 3, 5), \quad \gamma_4^{(1)} = (1, 2, 3, 5, 4),$$

pour lesquelles les valeurs respectives de Δ sont

$$\Delta_1^{(1)} = 2, \quad \Delta_2^{(1)} = 4, \quad \Delta_3^{(1)} = 5, \quad \Delta_4^{(1)} = 3 ;$$

ainsi qu'une seule permutation γ de la seconde classe qui est

$$\gamma_1^{(2)} = (2, 1, 3, 5, 4) \text{ pour laquelle } \Delta_1^{(2)} = 5$$

Les affectations associées sont les suivantes

$$\begin{array}{l} a_3 \ a_5 \ a_2 \ a_6 \ a_1 \ a_4 \\ \gamma_1^{(1)} \rightarrow b_5 \ b_3 \ b_6 \ b_4 \ b_2 \ b_1 \\ \gamma_2^{(1)} \rightarrow b_5 \ b_6 \ b_4 \ b_3 \ b_2 \ b_1 \\ \gamma_3^{(1)} \rightarrow b_5 \ b_6 \ b_3 \ b_2 \ b_4 \ b_1 \\ \gamma_4^{(1)} \rightarrow b_5 \ b_6 \ b_3 \ b_4 \ b_1 \ b_2 \\ \gamma_1^{(2)} \rightarrow b_5 \ b_3 \ b_6 \ b_4 \ b_2 \ b_1 \end{array}$$

Désignons par $\pi_i^{(j)}$ et $v_i^{(j)}$ la permutation π et son nombre d'inversions de l'affectation qu'indique $\gamma_i^{(j)}$; on a

$$\pi_1^{(1)} = (3, 4, 1, 11, 13, 9, 6, 5, 8, 12, 15, 7, 2, 10, 14), \quad v_1^{(1)} = 37$$

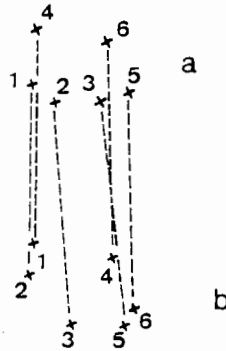
$$\pi_2^{(1)} = (1, 4, 6, 9, 12, 5, 3, 11, 10, 2, 8, 7, 13, 15, 14), \quad v_2^{(1)} = 29$$

$$\pi_3^{(1)} = (1, 8, 3, 13, 11, 9, 7, 2, 4, 12, 10, 6, 5, 15, 14), \quad v_3^{(1)} = 40$$

$$\pi_4^{(1)} = (1, 4, 3, 5, 10, 9, 6, 11, 12, 8, 2, 14, 15, 13, 7), \quad v_4^{(1)} = 27$$

$$\pi_1^{(2)} = (3, 4, 1, 11, 13, 9, 6, 5, 8, 12, 15, 7, 2, 10, 14), \quad v_1^{(2)} = 37$$

Il en résulte qu'il n'y a pas de meilleure affectation dans l'"entourage" de l'affectation dont on est parti ci-dessus



Pour représenter cette affectation on a retourné le plan de la configuration b telle qu'elle était présentée ci-dessus. On note que l'affectation respecte l'ordre de rencontre des sommets en parcourant, dans un sens donné, la ligne polygonale de fermeture convexe de la configuration.

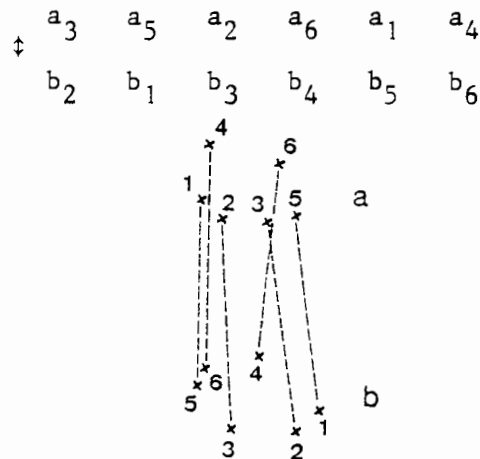
Nous avons établi le tableau suivant des valeurs du critère $v(\omega, \omega_t)$ pour chacune des affectations résultantes de l'attribution de b_j à a_i ; $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$. Nous avons retrouvé trois fois l'affectation ci-dessus ; une première fois à partir de la meilleure affectation résultante à l'attribution de b_1 , qui est

	a_4	a_1	a_6	a_2	a_3	a_5
\updownarrow						
	b_1	b_2	b_4	b_3	b_6	b_5

pour laquelle $v(\omega(A), \omega_t(A)) = 19$; ayant $D(b_1) = (2, 9, 11, 14, 15)$, la permutation $\gamma = (1, 2, 3, 5, 4)$ pour laquelle $\rho = 1$ permet de retrouver l'affectation ci-dessus. Les deux autres fois, comme meilleures affectations résultantes de b_5 et b_6

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
b_1	25	47	29	19	29	34
b_2	33	45	23	27	35	27
b_3	41	52	37	29	27	54
b_4	39	33	39	49	39	41
b_5	29	43	15	29	25	33
b_6	27	45	25	23	15	39

Considérons dans ce tableau la plus petite valeur de $v(\omega, \omega_t)$ non encore examinée ; elle est égale à 23 et elle est associée aux deux affectations résultantes de l'attribution de b_2 à a_3 et de b_6 à a_4 ; la seconde est identique à la première qu'on peut mettre sous la forme



Ici encore, l'affectation respecte l'ordre de rencontre des sommets en décrivant, dans un sens donné, la ligne polygonale de fermeture convexe de chacune des deux configurations.

Il nous reste à signaler que l'algorithme que nous venons de présenter semble plus robuste que le premier qui, dans ce dernier exemple où l'affectation n'est pas aisée, s'est mal comporté.

III - ETUDE DU SECOND PROBLEME

1. INTRODUCTION

Dans le second problème on se donne également deux configurations E et A mais de cardinaux inégaux

$$l = \text{card}(E) < m = \text{card}(A)$$

et il s'agit de détecter dans A les sous figures de m points chacune qui peuvent se déduire de E par le produit d'une projection conique et d'une homothétie. Il y a lieu par conséquent de retenir, relativement à une configuration C de n points du plan qu'on oriente, une donnée invariante par les transformations mentionnées. La donnée considérée (cf. [7]) se présente

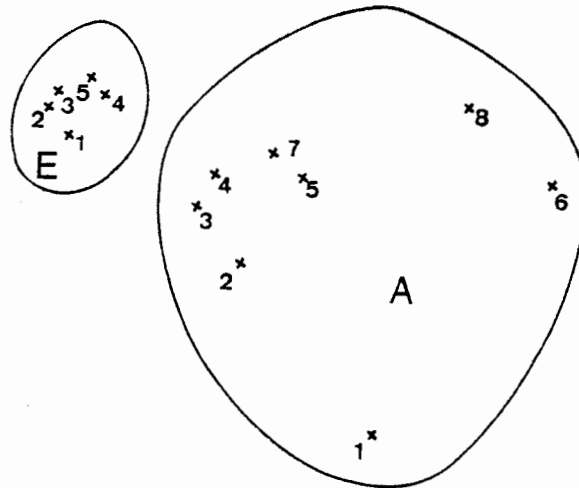
$$\begin{array}{cccc}
 c_1 & c_1(1) & c_1(2) & \cdots c_1(n-1) \\
 c_2 & c_2(1) & c_2(2) & \cdots c_2(n-1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_i & c_i(1) & c_i(2) & \cdots c_i(n-1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_n & c_n(1) & c_n(2) & \cdots c_n(n-1)
 \end{array} \quad (1)$$

qui est la représentation de $(n+1)$ ordres totaux dont le premier, qui a un statut particulier, est représenté par l'ordre des éléments selon la première colonne où c_i , sommet de rang i , est le i -ème sommet de C rencontré par une horizontale qui balaye son plan de façon ascendante. Chacun des n autres ordres est associé à chacun des sommets ; celui attaché à c_i , qui est représenté par la i -ème ligne du tableau, définit un ordre total sur $C - \{c_i\}$ qui est l'ordre de rencontre des différents sommets de la configuration par un demi-axe d'origine c_i , orienté positivement et qui tournerait dans le sens direct ; le point de rang j pour cet ordre est noté $c_i(j)$. Dans le cas, somme toute courant, où ce demi-axe rencontre plus d'un sommet à la fois, l'ordre devient préordre total qui continuera à être représenté dans la i -ème ligne par la suite des $(n-1)$ points dans un ordre compatible avec le préordre ; les sommets d'une même classe du préordre étant séparés par le signe \sim . Pour fixer les idées, on considère que la première colonne représente un ordre total, ce qui suppose que la configuration C est tournée de telle sorte qu'aucun de ses segments $c_i c_j$ n'est parallèle à l'horizontale.

Etant donnés les tableaux S et T respectivement associés aux deux configurations E et A (cf. exemple ci-dessous), chacun des deux ensembles E et A étant supposé muni de l'ordre total défini par la première colonne de son tableau ; il s'agit de déterminer l'ensemble des applications ϕ strictement croissantes de E dans A , telles que $(\forall_i), \phi(e_i(k)) < \phi(e_i(k+1))$ pour tout $k(1 \leq k \leq l-2)$ et relativement à l'ordre attaché à $\phi(e_i)$, lequel est représenté par la j -ème ligne du tableau T , si $\phi(e_i) = a_j$. En d'autres termes, en remplaçant dans la restriction de T à $\phi(E)$ chaque élément par sa contre image, on obtient le tableau S ; ce qu'on exprimera en disant que l'image réciproque de la restriction de T à $\phi(E)$, est le tableau S :

$$\phi^{-1}(T|_{\phi(E)}) = S \quad (2)$$

Pour fixer les idées considérons l'exemple ci-dessous, que nous allons traiter par la suite.



					a_1	a_6	a_8	a_5	a_7	a_4	$a_3 \sim a_2$
e_1	e_4	e_5	e_3	e_2	a_2	a_6	a_8	a_5	a_7	a_4	$a_3 \sim a_1$
					a_3	a_6	a_5	a_8	a_7	a_4	$a_2 \sim a_1$
e_2	e_4	e_5	e_3	e_1	a_4	a_5	a_6	a_8	a_7	a_3	$a_2 \sim a_1$
e_3	e_4	e_5	e_2	e_1	a_5	a_6	a_8	a_7	a_4	a_3	$a_2 \sim a_1$
e_4	e_5	e_3	e_2	e_1	a_6	a_8	a_7	a_5	a_4	a_3	$a_2 \sim a_1$
e_5	e_3	e_2	e_1	e_4	a_7	a_8	a_4	a_3	a_2	a_1	$a_5 \sim a_6$
		s			a_8	a_7	a_4	a_3	a_5	a_2	$a_1 \sim a_6$

T

Le nombre d'applications ϕ strictement croissantes de E dans A est égal à $\binom{m}{\ell}$; en effet, à chaque partie à ℓ éléments de A définissant la suite $(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(\ell)})$ correspond l'application ϕ pour laquelle $\phi(e_j) = a_{i(j)}$. Ce nombre peut être très grand et il n'est pas question d'essayer toutes les applications ϕ pour ne retenir que celles qui satisfont la relation (2) ci-dessus. Notons que chaque sommet e_i (resp. a_j) est présent exactement une fois dans chaque ligne du tableau S (resp. T).

Relativement aux différentes positions d'un même sommet e_{j_0} dans S, les auteurs précités (cf. [7]) définissent dans T un ensemble de rectangles devant chacun contenir l'image de e_{j_0} . L'affectation de a_i à e_{j_0} est impossible si a_i ne se trouve pas simultanément dans les divers rectangles délimités. Compte tenu des diverses impossibilités d'affectations ponctuelles, on détermine un ensemble d'applications ϕ , de cardinal sensiblement moins élevé que $\binom{m}{\ell}$ et dans lequel se trouve nécessairement l'ensemble des ϕ strictement croissantes qui remplissent la condition (2).

Cet algorithme n'exclut pas une part de tâtonnements puisque pour s'assurer qu'une affectation globale a priori possible, compte tenu des diverses impossibilités d'affectations ponctuelles, répond bien au problème ; il soit nécessaire de vérifier la condition (2).

En tenant compte davantage de la nature du problème nous serons conduits à proposer un algorithme rapide ayant un caractère directe et systématique.

2. ALGORITHME D'AFFECTATION

Chaque application ϕ solution du problème peut être représentée par un vecteur $(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(\ell)})$ où $i(1) < i(2) < \dots < i(\ell)$, satisfaisant les contraintes que résume la condition (2) ci-dessus. L'algorithme mettra en évidence dans l'ordre lexicographique la suite des vecteurs solutions ; en d'autres termes, si

$$(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(\ell)}) \text{ lexico} < (a_{j(1)}, a_{j(2)}, \dots, a_{j(\ell)}) ;$$

c'est-à-dire, si le premier indice k , où $a_{i(k)} \neq a_{j(k)}$, est tel que $a_{i(k)} < a_{j(k)}$; alors le premier vecteur du membre de gauche apparaîtra avant le second.

Chacun des éventuels vecteurs solution est construit pas à pas : composante après composante ; en tenant compte à chaque fois d'une nouvelle composante des contraintes définies par les tableaux S et T, relativement aux composantes déjà prises. La rapidité de notre algorithme, dont le principe est très simple, provient de ce que lorsqu'il s'introduit dans le choix d'une composante une impossibilité pour une bonne affectation globale ; il en résulte vite une impossibilité à satisfaire les contraintes dans la suite de la constitution du vecteur. Au tableau T on associe un tableau T' de mêmes dimensions et qui, initialement, est chargé de façon identique à T. T' qui est attaché à la constitution du vecteur ϕ en cours, évolue à chaque choix d'une nouvelle composante et permet de contrôler le caractère admissible de la solution en formation.

Supposons que l'algorithme vient de poser une valeur pour la h -ème composante d'un vecteur ϕ en formation qui, au vu de ses h premières composantes $a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(h)}$ ne contredit pas les contraintes ; l'état du tableau T' se déduit de sa forme initiale en remplaçant dans sa première colonne ainsi que dans ses lignes d'indices respectifs $i(1), i(2), \dots, i(h)$; $a_{i(j)}$ par e_j pour $1 \leq j \leq h$.

Le pas suivant de l'algorithme consiste à établir l'ensemble des valeurs possibles de la $(h+1)$ ème composante sous la forme

$$S_{(h+1)} = S_{(h+1)}^0 \cap S_{(h+1)}^{(1)} \cap S_{(h+1)}^{(2)} \cap \dots \cap S_{(h+1)}^{(h)}.$$

où $S_{(h+1)}^0$ est l'ensemble des valeurs possibles de $\phi(e_{h+1})$ compte tenu de l'ordre défini par la première colonne ; $S_{(h+1)}^0$ est relativement à cet ordre, l'intervalle ouvert $] \phi(e_h), a_u[$ où $u = n - m + h + 2$; en effet, il est impossible de respecter l'ordre, si on affectait e_{h+1} à a_j pour $j \leq k$ où $\phi(e_h) = a_k$.

De même, en regardant la première colonne du tableau S, l'affectation des $(m-h+1)$ sommets suivants e_{h+1} serait impossible si on attribuait e_{h+1} à a_v où v est supérieur ou égal à $u=n-m+h+2$.

$S_{(h+1)}^{(j)}$ est intervalle de la ligne $i(j)$ du tableau T ; si sur la ligne j du tableau S on a $e_{j_1} < e_{h+1} < e_{j_2}$ pour $j_1 \leq h$ et $j_2 \leq h$; si de plus, l'intervalle $]e_{j_1}, e_{j_2}[$ de cette ligne comprend η_1 éléments strictement, avant et η_2 après, alors $S_{(h+1)}^{(j)}$ est un sous-intervalle de $]a_{i(j_1)}, a_{i(j_2)}[$, défini sur la ligne $i(j)$ de T, de la forme $] \alpha, \beta [$ où $] a_{i(j_1)}, \alpha [$ et $] \beta, a_{i(j_2)} [$ sont respectivement de longueurs η_1 et η_2 .

Si $S_{(h+1)}$ n'est pas vide ; soit pour $a_{i(h+1)}$ le premier de ses éléments (celui dont l'indice est le plus petit) et posons

$$R_{(h+1)} = S_{(h+1)} - \{a_{i(h+1)}\}.$$

Il n'y aurait empêchement dans l'affectation de $a_{i(h+1)}$ à e_{h+1} que si la restriction à $\{a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(h)}\}$ de l'ordre attaché à $a_{i(h+1)}$ et représenté par la $i(h+1)$ ème ligne du tableau T, est incompatible avec l'ordre sur $\{e_1, e_2, \dots, e_h\}$, attaché à e_{h+1} et représenté par la $(h+1)$ ème ligne du tableau S ; dans ce dernier cas on prend pour nouveau $a_{i(h+1)}$ le premier élément de $R_{(h+1)}$, lequel lui est aussitôt ôté...

Si à une certaine étape $S_{(h+1)}$ ou $R_{(h+1)}$ est vide, ou bien si on vient d'achever l'extraction d'un vecteur ϕ solution ; alors on remonte la construction au dernier ensemble $R_{(j)}$ non encore vidé, pour chercher à envisager un nouveau vecteur ϕ ; nouveau, parce que lexicographiquement supérieur à tous ceux qui auraient pu déjà être constitués avant.

Exemple d'application

Considérons l'exemple ci-dessus envisagé où E est formé de 5 points et A de 8 points. Une application ϕ strictement croissante de $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ dans $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ pourra être plus simplement représentée par une application γ strictement croissante de $[1, 5]$ dans $[1, 8]$, où $\phi(e_i) = a_{\gamma(i)}$. Il y a $\binom{8}{5} = 56$ telles applications ; leur examen exhaustif conduirait à tenir compte de $56 \times 5 = 280$ composantes dont 5 pour chaque application ; nous verrons que l'algorithme nous permettra de n'en considérer qu'une très faible part. Signalons que nous avons simulé le tableau T' qui nous aide à fixer les ensembles de la forme $S_{h+1}^{(j)}$ (cf. ci-dessus) en posant un calque transparent sur T, sur lequel nous avons juxtaposé à certains des $a_{\gamma(i)}$ les e_i correspondants et induits par la construction en cours de ϕ .

On a, conformément aux notations ci-dessus

$$S_{(1)} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$\gamma(1) = 1, \text{ donne } R_{(1)} = \{a_2, a_3, a_4\}$$

$$S_{(2)} = \{a_2, a_3, a_4, a_5\} \cap \{a_7, a_4, a_3, a_2\} = \{a_2, a_3, a_4\}$$

$$\gamma(2) = 2, \text{ donne } R_{(2)} = \{a_3, a_4\}$$

$$S_{(3)} = \{a_3, a_4, a_5, a_6\} \cap \{a_5, a_7, a_4\} \cap \{a_5, a_7, a_4, a_3\} = \{a_4, a_5\}$$

$$\gamma(3) = 4 \rightarrow R_{(3)} = \{a_5\} ;$$

de plus, pour chacun des ordres respectivement attachés à e_3 et $a_{\gamma(3)}$ on a

$$e_2 < e_1 \text{ et } a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)} ;$$

d'où, non inversion

$$S_{(4)} = \{a_5, a_6, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_5\} \cap \{a_6, a_8, a_5, a_7\} \cap \{a_5, a_6, a_8, a_7\} = \{a_5, a_6\}$$

$\gamma(4) = 5 \rightarrow R_{(4)} = \{a_6\}$; de plus, pour chacun des ordres respectivement attachés à e_4 et $a_{\gamma(4)}$, on a bien

$$e_3 < e_2 < e_1 \text{ et } a_{\gamma(3)} < a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)} .$$

$$S_{(5)} = \{a_6, a_7, a_8\} \cap \{a_7\} \cap \{a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_7, a_3\} \cap \{a_6, a_8, a_7\}$$

$\gamma(5) = 7 \rightarrow R_{(5)} = \emptyset$; de plus pour chacun des ordres respectivement associés à e_5 et $a_{\gamma(5)}$, on a bien

$$e_3 < e_2 < e_1 < e_4 \text{ et } a_{\gamma(3)} < a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)} < a_{\gamma(4)}$$

D'où le premier vecteur solution

$$(a_1, a_2, a_4, a_5, a_7)$$

Il faut signaler que lors d'une nouvelle affectation ponctuelle compatible $a_{\gamma(i)}$, il y a lieu de remplacer $a_{\gamma(i)}$ par e_i dans la première colonne ainsi que dans les $(i-1)$ lignes respectivement attachées à $a_{\gamma(1)}, a_{\gamma(2)}, \dots, a_{\gamma(i-1)}$; de plus, dans la ligne relative à $a_{\gamma(i)}$ on remplacera $a_{\gamma(1)}, a_{\gamma(2)}, \dots, a_{\gamma(i-1)}$ respectivement par e_1, e_2, \dots, e_{i-1} .

Remontons au dernier ensemble $R_{(j)}$ non vide ; il s'agit ici de $R_{(4)}$.

Cette remontée se traduit par une remise en état du tableau T' qui consiste à remettre $a_{\gamma(h)}$ dans les cases contenant e_h pour $h \geq j$; et à restituer son état initial aux lignes attachées à $a_{\gamma(h)}$, pour $h \geq j$.

$\gamma(4) = 6 \rightarrow R_{(4)} = \emptyset$; de plus, pour chacun des ordres correspondants à e_4 et à $a_{\gamma(4)}$, on a bien

$$e_3 < e_2 < e_1 \text{ et } a_{\gamma(3)} < a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)}$$

$$S_5 = \{a_7, a_8\} \cap \{a_8, a_5, a_7\} \cap \{a_8, a_5, a_7\} \cap \{a_8, a_7, a_3\} \cap \{a_8, a_7, a_5\} = \{a_7, a_8\}$$

$\gamma(5) = 7 \rightarrow R(5) = \{a_8\}$; de plus, pour chacun des ordres correspondants à e_5 et à $a_{\gamma(5)}$, on a bien

$$e_3 < e_2 < e_1 < e_4 \quad \text{et} \quad a_{\gamma(3)} < a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)} < a_{\gamma(4)}$$

D'où le second vecteur solution

$$(a_1, a_2, a_4, a_6, a_7)$$

Remontons au dernier ensemble $R_{(j)}$ non vide ; il s'agit de $R_{(5)}$

$\gamma(5) = 8 \rightarrow R_{(5)} = \emptyset$; de plus, pour chacun des ordres associés à e_5 et à $a_{\gamma(5)}$, on a bien

$$e_3 < e_2 < e_1 < e_4 \quad \text{et} \quad a_{\gamma(3)} < a_{\gamma(2)} < a_{\gamma(1)} < a_{\gamma(4)}$$

D'où le troisième vecteur solution

$$(a_1, a_2, a_4, a_6, a_8)$$

La remontée nous conduit cette fois-ci à $R_{(3)} = \{a_5\}$.

$\gamma(3) = 5 \rightarrow R_{(3)} = \emptyset$; affectation compatible avec chacun des ordres associés à e_3 et à $a_{\gamma(3)}$.

$$S_{(4)} = \{a_6, a_7\} \cap \{a_6\} \cap \{a_6, a_8, a_7, a_4\} = \{a_6\}$$

$\gamma(4) = 6 \rightarrow R_{(4)} = \emptyset$; affectation compatible avec chacun des ordres associés à e_4 et à $a_{\gamma(4)}$.

$$S_{(5)} = \{a_7, a_8\} \cap \{a_8\} \cap \{a_8\} \cap \{a_8, a_7, a_4, a_3\} \cap \{a_8, a_7\} = \{a_8\}$$

$\gamma(5) = 8 \rightarrow R_{(5)} = \emptyset$; affectation compatible.

D'où le quatrième vecteur solution

$$(a_1, a_2, a_5, a_6, a_8)$$

La remontée nous conduit à $R_{(2)} = \{a_3, a_4\}$

$\gamma(2) = 3 \rightarrow R_{(2)} = \{a_4\}$; affectation compatible.

$$S_{(3)} = \{a_4, a_5, a_6\} \cap \{a_5, a_7, a_4\} \cap \{a_8, a_7, a_4\} = \{a_4\}$$

$\gamma(3) = 4 \rightarrow R_{(3)} = \emptyset$; affectation compatible.

$$S_{(4)} = \{a_5, a_6, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_5\} \cap \{a_6, a_5, a_8\} \cap \{a_5, a_6, a_8\} = \{a_5, a_6\}$$

$\gamma(4) = 5 \rightarrow R_{(4)} = \{a_6\}$; affectation compatible.

$$S_{(5)} = \{a_6, a_7, a_8\} \cap \{a_7\} \cap \{a_8, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_7\} = \{a_7\}$$

$\gamma(5) = 7 \rightarrow R_{(5)} = \emptyset$; affectation compatible.

D'où le cinquième vecteur solution

$$(a_1, a_3, a_4, a_5, a_7)$$

La remontée nous conduit à $R_{(4)} = \{a_6\}$

$$\gamma(4) = 6 \rightarrow R_{(4)} = \emptyset ;$$

$$S_{(5)} = \{a_7, a_8\} \cap \{a_8, a_5, a_7\} \cap \{a_5, a_8, a_7\} \cap \{a_8, a_7\} \cap \{a_8, a_7, a_5\} = \{a_7, a_8\}$$

qui donne lieu effectivement aux sixième et septième vecteurs solutions

$$(a_1, a_3, a_4, a_6, a_7) \text{ et } (a_1, a_3, a_4, a_6, a_8)$$

Remontons à $R_{(2)} = \{a_4\}$;

$$\gamma(2) = 4 \rightarrow R_{(2)} = \emptyset ;$$

$$S_{(3)} = \{a_5, a_6\} \cap \{a_5, a_7\} \cap \{a_8, a_7, a_3, a_2\} = \emptyset$$

Remontons donc à $R_{(1)} = \{a_2, a_3, a_4\}$;

$$\gamma(1) = 2 \rightarrow R_{(1)} = \{a_3, a_4\} ;$$

$$S_{(2)} = \{a_3, a_4, a_5\} \cap \{a_7, a_4, a_3, a_1\} = \{a_3, a_4\}$$

$$\gamma(2) = 3 \rightarrow R_{(2)} = \{a_4\} ;$$

$$S_{(3)} = \{a_4, a_5, a_6\} \cap \{a_5, a_7, a_4\} \cap \{a_8, a_7, a_4\} = \{a_4\}$$

$$\gamma(3) = 4 \rightarrow R_{(3)} = \emptyset, \text{ affectation compatible ;}$$

$$S_{(4)} = \{a_5, a_6, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_5\} \cap \{a_6, a_5, a_8\} \cap \{a_5, a_6, a_8\} = \{a_5, a_6\}$$

$$\gamma(4) = 5 \rightarrow R_{(4)} = \{a_6\}, \text{ affectation compatible ;}$$

$$S_{(5)} = \{a_6, a_7, a_8\} \cap \{a_7\} \cap \{a_8, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_7\} \cap \{a_6, a_8, a_7\} = \{a_7\}$$

$\gamma(5) = 7 \rightarrow R_{(5)} = \emptyset$, affectation compatible qui donne le huitième vecteur solution

$$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_7)$$

Remontons à $R_{(4)} = \{a_6\}$ et posons

$$\gamma(4) = 6 \rightarrow R_{(4)} = \emptyset, \text{ affectation compatible ;}$$

$$S_{(5)} = \{a_7, a_8\} \cap \{a_8, a_5, a_7\} \cap \{a_5, a_8, a_7\} \cap \{a_8, a_7\} \cap \{a_8, a_7, a_5\} = \{a_7, a_8\}$$

qui conduit à la neuvième et dixième affectations admissibles

$$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_7) \text{ et } (a_3, a_3, a_4, a_6, a_8)$$

Remontons alors à $R_{(2)} = \{a_4\}$;

$$\gamma(2) = 4 \rightarrow R_{(2)} = \emptyset ;$$

$$S_{(3)} = \{a_5, a_6\} \cap \{a_5, a_7\} \cap \{a_8, a_7, a_3\} = \emptyset$$

Remontons dans ces conditions à $R_{(1)} = \{a_3, a_4\}$

$$\gamma(1)=3 \rightarrow R_{(1)}=\{a_4\}$$

$$S_{(2)}=\{a_4, a_5\} \cap \{a_7, a_4, a_2, a_1\}=\{a_4\}$$

$$\gamma(2)=4 \rightarrow R_{(2)}=\emptyset$$

$$S_{(3)}=\{a_5, a_6\} \cap \{a_8, a_7\} \cap \{a_8, a_7\}=\emptyset$$

Remontons à $R_{(1)}=\{a_4\}$;

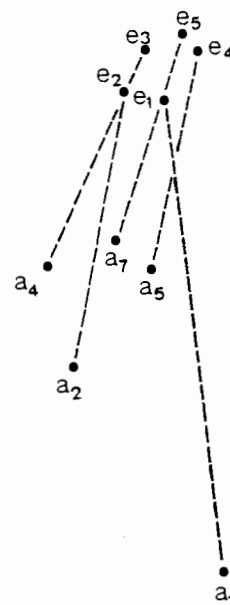
$$\gamma(1)=4 \rightarrow R_{(1)}=\emptyset ;$$

$$S_{(2)}=\{a_5\} \cap \{a_7, a_3, a_2, a_1\}=\emptyset$$

La recherche est donc achevée.

Il faut ici préciser que nous avons délibérément constitué la configuration A de façon que $a_2 a_3 a_4 a_5 a_7$ soit homothétique à $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ et que $a_1 a_2 a_5 a_6 a_8$ soit également homothétique à $a_2 a_3 a_4 a_5 a_7$ dans le rapport $\frac{a_1 a_2 a_5 a_6 a_8}{a_2 a_1 / a_3 a_2}$.

On a certes retrouvé les deux affectations correspondantes ; il s'agit du quatrième et du huitième vecteurs solutions ; mais la seule transformation en jeu dans ces deux cas étant l'homothétie, il ne faut pas s'étonner de trouver d'autres affectations ; par exemple la première. Est-ce à dire que la configuration $a_1 a_2 a_4 a_7 a_5$ puisse se déduire de $e_1 e_2 e_3 e_5 e_4$ par le produit d'une projection conique et d'une homothétie ? Cette transformation géométrique laisse bien invariante la donnée représentée matériellement par le tableau S ; mais réciproquement, comment caractériser géométriquement la classe des configurations associés à un même tableau S ; en d'autres termes comment obtenir un résultat analogue à celui de R.N. Shepard et J.P. Benzecri concernant l'ordonnance (cf. § II.1).



De toutes façons, l'algorithme défini ci-dessus réduit très considérablement le nombre de solutions envisageables qu'on peut confronter avec une information extérieure.

ANNEXE

LE PROBLEME D'AFFECTATION A COEFFICIENTS ENTIERS

Etant donnée une matrice (α_{ij}) , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$; dont les termes sont des nombres entiers ; il s'agit de trouver la permutation τ de $(1, 2, \dots, n)$ qui minimise $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i\tau(i)}$.

I - PRELIMINAIRES

Système de représentants distincts d'une suite finie de parties d'un ensemble fini (SDR)

1. DEFINITION

Soit $U = \{(S_1, S_2, \dots, S_n)\}$ une suite de n parties d'un ensemble fini E ; on appelle système de représentants distincts de U une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) formée de n éléments de E deux à deux différents et où x_i appartient à S_i .

Exemple. Soit $E = \{x, y, z, u, v, w\}$ et soit la suite de parties

$$U = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$$

où

$$S_1 = \{x, y, z\}$$

$$S_2 = \{x, y, u\}$$

$$S_3 = \{x, y, v\}$$

$$S_4 = \{z, u, v, w\}$$

$$S_5 = \{z, u, v, w\}$$

la suite (x, y, v, z, u) constitue un SDR. Par contre la suite de parties

$$V = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$$

où

$$T_1 = \{x, y\}$$

$$T_2 = \{x, y\}$$

$$T_3 = \{x, y\}$$

$$T_4 = \{z, u, v, w\}$$

$$T_5 = \{z, u, v, w\}$$

ne peut comporter de SDR puisque $\text{card}(T_1 \cup T_2 \cup T_3) < 3$.

Il est clair que pour que la suite (S_1, S_2, \dots, S_n) admette un SDR il est nécessaire que pour toute partie $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$ des indices, $\text{card} \left(\bigcup_{1 \leq h \leq k} S_{i_h} \right) \geq k$ (condition C).

Il est remarquable que cette condition nécessaire soit aussi suffisante comme l'a établi Philip Hall en 1935. Nous allons retrouver ce résultat de façon algorithmique.

2. ALGORITHME DE RECHERCHE DE TOUS LES SDR D'UNE SUITE U.

Relativement à une indexation des objets on peut se donner E sous la forme $E = \{1, 2, \dots, j, \dots, m\}$ où j désigne l'objet x_j . On peut également se donner la famille $U = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ sous la forme d'un tableau d'incidence (ε_{ij}) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, dont les lignes sont indexées par U et les colonnes par E ; $\varepsilon_{ij} = 1$ (resp. 0) si l'objet j est présent (resp. absent) dans S_i . Soit

par exemple le tableau suivant

	1	2	3	4	5
S_1	1	1	1	0	0
S_2	1	1	0	1	0
S_3	1	1	0	0	1
S_4	0	0	1	1	1

La donnée d'un SDR est équivalente à celle d'une application injective ψ de $[1, 2, \dots, n]$ dans $[1, 2, \dots, m]$ pour laquelle $\psi(i) \in S_i$, qu'on peut représenter sous la forme d'un vecteur $(\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(n))$. Le principe de l'algorithme de détermination de ces vecteurs est analogue à celui du paragraphe III.2. L'ordre d'extraction par l'algorithme des différents vecteurs solutions correspond à l'ordre lexicographique. Chacun des vecteurs est construit composante après composante ; on se sert pour cela d'un tableau \mathcal{C}' initialement identique au tableau d'incidence \mathcal{C} . \mathcal{C}' évolue avec la formation du vecteur auquel il reste attaché. Le fonctionnement de l'algorithme est défini comme suit.

$\psi(1)$ est le premier indice de la colonne dont l'intersection avec la première ligne comporte un 1 dans \mathcal{C}' au départ identique à \mathcal{C} . Ayant défini une telle colonne, on remplace dans \mathcal{C}' par 0 le contenu des différentes cases de cette colonne à partir de la première ligne et de haut en bas.

$\psi(2)$ est le premier indice de la colonne dont l'intersection avec la deuxième ligne comporte un 1 dans \mathcal{C}' . Ayant défini cette colonne, on remplace par 0 le contenu de ses différentes cases à partir de la seconde et de haut en bas.

Supposons avoir établi, conformément à l'algorithme, $(k-1)$ premières composantes $\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(k-1)$; pour la définition de $\psi(k)$ où $k \leq n$, deux cas se présentent.

a) La k -ème ligne du tableau \mathcal{C}' comporte au moins un 1.

$\psi(k)$ est alors le premier indice de la colonne de \mathcal{C}' dont l'intersection avec la k -ème ligne comporte un 1. Ayant déterminé une telle colonne, on remplace dans \mathcal{C}' par 0 le contenu de ses différentes cases à partir de la k -ème et de haut en bas.

b) La k -ème ligne du tableau \mathcal{C}' ne comporte que des 0.

Dans ces conditions, la construction du vecteur ψ ne peut se poursuivre et il y a lieu de remanier les dernières composantes. Pour cela on remonte à la dernière ligne de \mathcal{C}' non encore formée de composantes toutes nulles ; s'il s'agit de la l -ème, on aura à reprendre la suite des composantes $(\psi(j) / j \geq l)$. On pose pour $\psi(l)$ le premier indice de la colonne dont l'intersection avec la l -ème ligne contient 1 et après avoir "remis en état" le tableau \mathcal{C}' ; on remplace par 0, à partir de la l -ème ligne, le contenu des différentes cases de la colonne considérée. Remettre en état le tableau

\mathcal{C}' correspond à restituer le contenu de ses $(n-l)$ dernières lignes avant le choix du dernier $\psi(l)$; ceci peut se faire aisément en chargeant dans le rectangle inférieur, défini par $i > l$, chaque semi-colonne d'indice j n'appartenant pas à l'ensemble $\{\psi(i)/i \leq l-1\}$ avec son contenu initial qui peut être directement lu sur le tableau \mathcal{C} qu'on conserve en mémoire.

Si $k=n$ et si le choix de $\psi(n)$ est possible, on extrait le vecteur solution $(\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(n))$ qui fournit un SDR. On pose 0 dans la case $(n, \psi(n))$ et on reprend la section commençante du vecteur extrait : $(\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(i-1))$; si la dernière ligne qui contient encore un 1 est la i -ème, i peut être égal à n .

Considérons le tableau \mathcal{C}' comme un vecteur de $\{0,1\}^{mn}$ qu'on obtient en juxtaposant la suite des lignes du tableau \mathcal{C} ; la h -ème composante d'un tel vecteur est, si $h=mq+r$, la r -ème composante de la $(q+1)$ -ème ligne. En définissant sur $\{0,1\}^{mn}$ l'ordre lexicographique pour lequel

$$\begin{matrix} \text{lexico} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{mn}) < (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{mn}) \end{matrix}$$

si la première composante j pour laquelle $\varepsilon_j \neq \eta_j$ est telle que $\varepsilon_j < \eta_j$ ($\varepsilon_j = 0$, $\eta_j = 1$) ; on se rend compte qu'après chaque pas de l'algorithme le vecteur \mathcal{C}' diminue lexicographiquement. Il arrivera fatalement un moment où les $(k-1)$ premières lignes de \mathcal{C}' seront remplies de 0 et où on se trouve dans le cas b) défini ci-dessus ; l'algorithme s'arrête alors ayant extrait tous les SDR existants.

Si on se trouve dans la situation qu'on vient de décrire sans qu'on ait pu mettre en évidence un seul SDR ; c'est que, compte tenu du caractère exhaustif de l'algorithme, la famille $U = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ n'en possède pas. Nous allons dans ces conditions montrer qu'il existe nécessairement une partie K de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ pour laquelle

$$\text{card} \left(\bigcup_{i \in K} S_i \right) < \text{card}(K)$$

Nous établirons ce résultat en exhibant effectivement un tel ensemble K d'indices. Soit $(\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(k-1))$ le vecteur dont la formation a été arrêtée et qui définit un SDR de la sous-famille $V = (S_1, S_2, \dots, S_{k-1})$.

L'algorithme nous indique qu'il est nécessaire d'utiliser tous les éléments de S_k dans tout SDR de V . Posons $E_k = S_k$ et soit K_1 l'ensemble des indices désignant la sous-famille de V dont les représentants définis par ψ appartiennent à E_k

$$K_1 = \{i / \psi(i) \in E_k\} ;$$

chaque élément de E_k ayant été utilisé exactement une fois comme représentant,

$$\text{card}(K_1) = \text{card}(E_k)$$

Posons

$$E_{k+1} = \bigcup_{i \in K_1} S_i$$

qui est la réunion des ensembles S représentés par des éléments de E_k .

On a

$$\text{card}(E_{k+1}) \geq \text{card}(E_k)$$

Si le cardinal de E_{k+1} ne dépasse pas celui de E_k , on a

$$K = K_1 \cup \{k\}$$

en effet on a bien

$$\text{card}\left(\bigcup_{i \in K} S_i\right) < \text{card}(K)$$

puisque le second membre vaut $\text{card}(K_1) + 1$ et le premier membre $\text{card}(E_{k+1})$ qui vaut $\text{card}(K_1)$.

Si le cardinal de E_{k+1} dépasse strictement celui de E_k , il existe un ensemble S_ℓ de la famille

$$\{S_i / i \in K_1\}$$

tel que

$$S_\ell - E_k \neq \emptyset \text{ (différence ensembliste)}$$

dans ce cas, la famille

$$\{S_i / i \in K_1 \cup \{k\}\}$$

possède un SDR ; en effet soit $x \in S_\ell - E_k$. x représentera S_ℓ dont l'ex-représentant est libéré pour représenter $S_k = E_k$.

Dans le cas où $\text{card}(E_{k+1}) > \text{card}(E_k)$; soit

$$K_2 = \{i / \psi(i) \in E_{k+1}\} ;$$

chaque élément de E_{k+1} a nécessairement été utilisé par ψ comme représentant, autrement la formation de ψ n'aurait pas été bloquée ; par conséquent

$$\text{card}(K_2) = \text{card}(E_{k+1})$$

Posons

$$E_{k+2} = \bigcup_{i \in K_2} S_i : \text{réunion des ensembles } S \text{ représentés par des éléments de}$$

E_{k+1} .

On a évidemment

$$E_{k+1} \subset E_{k+2}, \text{ d'où } \text{card}(E_{k+2}) \geq \text{card}(E_{k+1}).$$

Si $\text{card}(E_{k+2}) = \text{card}(E_{k+1})$, on obtient $K = K_2 \cup \{k\}$; en effet,

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{i \in K} S_i\right) &< \text{card}(K) = \text{card}(K_2) + 1 \\ &= \text{card}(E_{k+1}) + 1 \end{aligned}$$

puisque $E_{k+2} = \bigcup_{i \in K} S_i$.

Si $\text{card}(E_{k+2}) > \text{card}(E_{k+1})$, il existe alors un ensemble S_ℓ de la famille

$$\{S_i / i \in K_2\}$$

tel que $S_\ell - E_{k+1} \neq \emptyset$; dans ce cas, la famille

$$\{S_i / i \in K_2 \cup \{k\}\}$$

admet un SDR ; en effet soit $x \in S_\ell - E_{k+1}$. x représentera S_ℓ libérant son ancien représentant qui appartient soit à $E_k = S_k$, soit à un ensemble S_ℓ , représenté par un élément de S_k . Dans le premier cas l'ex-représentant x' de S_ℓ représentera S_k et dans le second cas x' représentera S_ℓ , dont le précédent représentant sera attribué à S_k .

On poursuit de proche en proche cette construction. Si après l'étape j , on n'a pas atteint un ensemble K ; on pose

$K_{j+1} = \{i / \psi(i) \in E_{k+j}\}$ dont le cardinal est le même que E_{k+j} ; soit

$$E_{k+j+1} = \bigcup_{\ell \in K_{j+1}} S_\ell \text{ qui contient } E_{k+j}.$$

Si $\text{card}(E_{k+j+1}) = \text{card}(E_{k+j})$, on obtient $K = K_{j+1} \cup \{k\}$;

Si $\text{card}(E_{k+j+1}) > \text{card}(E_{k+j})$, on montre qu'on peut construire un SDR pour la famille $\{S_i / i \in K_{j+1} \cup \{k\}\}$.

On se rend compte que par ce processus on atteindra successivement un ensemble K ; sinon ce serait contradiction avec le blocage de l'algorithme dans la formation de ψ .

L'algorithme que nous proposons de rechercher de tous les SDR d'une famille finie de parties finies d'un ensemble est essentiellement différent de celui de Jr. Marshall Hall (cf. [4], chap. 5) lequel ne met en évidence qu'un seul SDR.

L'application de notre algorithme à l'exemple représenté ci-dessus par un tableau d'incidence \mathcal{C} , 4×5 , donne successivement les vecteurs ψ solutions suivants

(1,2,5,3)	(2,1,5,3)	(3,1,2,4)
(1,2,5,4)	(2,1,5,4)	(3,1,2,5)
(1,4,2,3)	(2,4,1,3)	(3,2,1,4)
(1,4,2,5)	(2,4,1,5)	(3,2,1,5)
(1,4,5,3)	(2,4,5,3)	(3,4,1,5)
		(3,4,2,5)

3. APPLICATION DE L'ALGORITHME A LA DECOUVERTE D'UN ISOMORPHISME ENTRE DEUX GRAPHEs

Soient $G=(E,\Gamma)$ et $H=(F,\Lambda)$ deux graphes où

$$\text{card}(E) = \text{card}(F) = n ;$$

après avoir indexé par $I=\{1,2,\dots,n\}$ E et F , on associe aux deux graphes leurs matrices d'incidence respectives (ε_{ij}) et (η_{ij}) , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$;

où $\varepsilon_{ij}=1$ (resp. 0) s'il existe un arc de Γ d'origine i et d'extrémité j
 (resp. sinon).
 $\eta_{ij}=1$ (resp. 0) s'il existe un arc de Λ d'origine i et d'extrémité j
 (resp. sinon)

Les deux graphes sont isomorphes s'il existe une permutation τ de $(1,2,\dots,n)$, pour laquelle

$$\varepsilon_{ij}=1(\text{resp. } 0) \Leftrightarrow \eta_{\tau(i)\tau(j)}=1(\text{resp. } 0) \quad (*)$$

Au graphe G (resp. H) associons la suite des graphes $G^k=(E, \Gamma^k)$ (resp. $H^k=(E, \Lambda^k)$) dont les matrices d'incidence respectives seront notées

$(\varepsilon_{ij}^{(k)})$ et $(\eta_{ij}^{(k)})$ et définies par

$\varepsilon_{ij}^{(k)}=1$ (resp. 0) s'il existe un chemin de Γ de longueur k (i.e. comprenant k arcs) d'origine i et d'extrémité j (resp. sinon) ;

on a évidemment une définition analogue pour $\eta_{ij}^{(k)}$.

Il est clair que si les deux graphes G et H sont isomorphes le nombre d'arcs de Γ^k d'origine i est le même que le nombre d'arcs de Λ^k d'origine $\tau(i)$, pour tout i . Considérons dans ces conditions, une matrice carrée $n \times n$, $(\alpha_{ij}^{(k)})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$; où $\alpha_{ij}^{(k)}$ est la différence entre le nombre d'arcs de $\Gamma^{(k)}$ issus du sommet i de E et le nombre d'arcs de $\Lambda^{(k)}$ issus du sommet j de F . A la matrice $(\alpha_{ij}^{(k)})$ associons la matrice $(\gamma_{ij}^{(k)})$ où $\gamma_{ij}^{(k)}=1$ (resp. 0) si $\alpha_{ij}^{(k)}=0$ (resp. $\neq 0$) ; et associons à ces différentes matrices obtenues pour les différentes valeurs de k , la matrice infimum (δ_{ij}) définie de la façon suivante

$$\delta_{ij}=1(\text{resp. } 0) \text{ si } \gamma_{ij}^{(k)}=1 \text{ pour tout } k \text{ (resp. sinon)}$$

(δ_{ij}) est le tableau \mathcal{O} de la famille $(S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n)$ où S_i est l'ensemble des sommets de F de même demi-degré extérieur que le sommet i de E pour chacun des graphes G^k et H^k .

S'il existe un isomorphisme, il est nécessairement donné par un SDR de cette famille ; ce SDR définit une permutation τ qu'on appliquera simultanément aux lignes et colonnes de la matrice (η_{ij}) pour tester si la condition (*) ci dessus est vérifiée.

Cet algorithme, basé sur la recherche systématique de tous les SDR, est essentiellement différent de ceux du type de S.H. Unger (cf. [9]) et de S.P. Steen (cf. [10]). Dans ces derniers on établit deux chaînes de partitions isomorphes sur, respectivement, E et F , où on démarre de la partition la moins fine à une seule classe pour espérer aboutir à celle la plus fine, où chaque classe ne contient plus qu'un seul objet, de façon à respecter à chaque niveau une correspondance, entre les classes de la partition sur E et celle sur F , qui soit compatible avec l'isomorphisme entre les deux graphes : deux classes associées par la dite correspondance doivent être telles que s'il existe un isomorphisme entre les deux graphes, notamment défini par τ , l'image par τ de l'une des classes est nécessaire-

ment la classe associée. Les séparations successives de sommets en classes et sous-classes, pour chacun des deux graphes et de façon associée se font donc conformément à certaines conditions nécessaires d'isomorphie entre les deux graphes ; ces conditions peuvent être de même type que celles que nous considérons ci-dessus. De façon générale on raffine les deux partitions correspondantes d'un même niveau en multipliant les conditions nécessaires d'isomorphie.

Notre algorithme semble avoir un caractère plus global ; toutefois il faut comparer sur ordinateur son efficacité à ces derniers.

II - THEOREME D'AFFECTATION

1. THEOREME

Le *minimum* de la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i\tau(i)}$ sur l'ensemble de toutes les permutations τ de $(1, 2, \dots, n)$ est égal au *maximum* de $\sum_{1 \leq i \leq n} u_i + \sum_{1 \leq j \leq n} v_j$ où $w = (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_1, v_2, \dots, v_n)$ décrit l'intersection des n^2 demi-espaces $C_{ij} = \{w / u_i + v_j \leq \alpha_{ij}\}$ de Z^{2n} .

La valeur commune est atteinte pour une permutation τ_0 telle que

$$u_i + v_{\tau_0(i)} = \alpha_{i\tau_0(i)}$$

laquelle définit la solution du problème d'affectation.

$(\bigcap_{i,j} C_{ij})$ n'est pas vide ; considérons en effet le point w pour lequel tous les v_j sont nuls et chaque u_i égal au minimum par rapport à j de α_{ij} . Pour w pris dans $(\bigcap_{i,j} C_{ij})$ et pour toute permutation τ , on a

$$u_i + v_{\tau(i)} \leq \alpha_{i\tau(i)} ;$$

d'où en sommant par rapport à i

$$\sum_{1 \leq i \leq n} u_i + \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i\tau(i)}$$

Il en résulte que le maximum M de $\sum_{1 \leq i \leq n} u_i + \sum_{1 \leq j \leq n} v_j$ existe et que le minimum μ de $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i\tau(i)}$ doit satisfaire $\mu \geq M$.

On doit prouver que $\mu = M$.

Commençons par considérer le point w signalé ci-dessus dont les composantes sont définies comme suit

$$u_i = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} \quad \text{pour tout } i \text{ et } v_j = 0 \text{ pour tout } j.$$

A chaque indice i de ligne associons l'ensemble S_i des indices j_i de colonne où $u_i + v_{j_i} = \alpha_{ij_i}$: $S_i = \{j / u_i + v_j = \alpha_{ij}\}$; en d'autres termes, S_i est ici formé de l'ensemble des indices j_i de colonne où α_{ij} est minimum.

Si la suite (S_1, S_2, \dots, S_n) admet au moins un SDR ; il est clair qu'une solution du problème d'affectation est obtenue par la recherche algorithmique d'un SDR qui se présentera sous la forme $(j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_n)$ où

$j_i \in S_i, (j_1, j_2, \dots, j_n)$ étant nécessairement une permutation de $(1, 2, \dots, n)$.
 Pour obtenir toutes les solutions également optimales, lorsqu'il en existe plus d'une ; il y a lieu de déterminer tous les SDR de la famille $\{S_i / 1 \leq i \leq n\}$, ce qui peut être fait de façon systématique (cf. ci-dessus).

Si la suite (S_1, S_2, \dots, S_n) n'a pas de SDR alors la condition C (cf. ci-dessus) est violée, nous pouvons par conséquent trouver une famille de k ensembles $S_i ; (S_i / i \in K)$ où $\text{card}(K) = k$ et telle que $\text{card}(\cup_{i \in K} S_i) \leq (k-1)$. Il faut souligner que l'algorithme de construction d'un SDR met en évidence les familles d'ensembles S_i où la condition C est en défaut, lorsque cette dernière n'est pas satisfaite.

Désignons par J le sous-ensemble des indices tel que $J = \cup_{i \in K} S_i$, on a $\text{card}(J) = (k-h) \leq k-1$.

On peut se fixer les idées en permutant les lignes et les colonnes du tableau des coefficients α_{ij} pour l'amener à la forme suivante :

	J	J^c
K	$u_i^* = u_i + 1$ $v_j^* = v_j - 1$	$u_i^* = u_i + 1$ $v_j^* = v_j$
K^c	$u_i^* = u_i$ $v_j^* = v_j - 1$	$u_i^* = u_i$ $v_j^* = v_j$

Nous allons par un niveau choix de w dans $(i, j) \in C_{ij}$ remanier les différents ensembles S_i cherchant à grossir ceux de la famille $\{S_i / i \in K\}$.

Remplaçons le point w par $w^* = (u_1^*, \dots, u_n^*, v_1^*, \dots, v_n^*)$ en posant

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i + 1, & \text{si } i \in K \\ u_i^* &= u_i, & \text{si } i \notin K \\ v_j^* &= v_j - 1, & \text{si } j \in J \\ v_j^* &= v_j, & \text{si } j \notin J \end{aligned}$$

On a pour w^* la relation

$$\sum_{1 \leq i \leq n} u_i^* + \sum_{1 \leq j \leq n} v_j^* = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i + \sum_{1 \leq j \leq n} v_j + h, \text{ car } \text{card}(J) = k-h ;$$

ainsi la somme des composantes de w^* dépasse de h celle de w .

Nous allons toutefois montrer qu'on a toujours

$$u_i^* + v_j^* \leq \alpha_{ij} \text{ pour tout } (i, j) ;$$

d'après les formules de transformation ci-dessus, cette relation est sûrement satisfaite à moins que $i \in K$ et $j \notin J$, mais dans ce cas et d'après la définition même de S_i ,

$$u_i + v_j \leq \alpha_{ij} - 1 \text{ d'où } u_i^* + v_j^* \leq \alpha_{ij}$$

Avec le passage de w à w^* , l'ensemble S_i est remplacé par

$$S_i^* = \{j / u_i^* + v_j^* = \alpha_{ij}\}$$

Si la famille $\{S_i^* / 1 \leq i \leq n\}$ possède un SDR, nous aboutissons à la solution du problème d'affectation et donc du théorème. Sinon on continue comme précédemment pour trouver de nouvelles valeurs des composantes u_i et v_j pour lesquelles la somme des coordonnées de w s'en trouvera accrue, sans pour autant que la condition $u_i + v_j \leq \alpha_{ij}$ pour tout (i, j) puisse être mise en défaut. Puisque notre choix initial correspond à des valeurs entières des u_i et que à chaque étape $(\sum_i u_i + \sum_j v_j)$ augmente strictement d'un entier positif ; le processus doit nécessairement se terminer et à la fin nous aurons prouvé le théorème et trouvé la solution au problème d'affectation.

Nous avons inséré dans la démonstration du théorème l'algorithme déterminant effectivement à chaque étape la famille $\{S_i / 1 \leq i \leq n\}$ dont un SDR, s'il existe, fournit une solution au problème d'affectation. Il est souhaitable de procéder directement à la recherche d'un SDR sans chercher à faire vérifier la condition C car d'une part, cette vérification peut s'avérer longue et d'autre part, si C n'est pas remplie l'algorithme fait apparaître une sous-famille où cette condition est violée.

Il est important de remarquer que la marche de l'algorithme serait sensiblement plus rapide si le vecteur w^* était calculé selon les formules

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i + \lambda \text{ (resp. } u_i) & \text{si } i \in K \text{ (resp. si } i \notin K) \\ v_j^* &= v_j - \lambda \text{ (resp. } v_j) & \text{si } j \in K \text{ (resp. si } j \notin J) \end{aligned}$$

où λ est la plus petite valeur non nulle de $(\alpha_{ij} - (u_i + v_j))$ lorsque i décrit K ; avec un tel choix de λ , on a bien toujours

$$u_i^* + v_j^* \leq \alpha_{ij}$$

Il faut souligner que le théorème précédent peut être étendu, par approximations successives, au cas où la matrice (α_{ij}) est formée de nombres réels quelconques. Le problème reste un cas particulier de celui où il s'agit de maximiser $\sum_{(i,j)} \alpha_{ij} z_{ij}$ où la matrice $Z = (z_{ij})$ est doublement stochastique. On sait que ce problème a une solution qui doit être atteinte quand Z est une matrice de permutation, puisque les matrices de permutation sont les points extrêmes de l'espace des matrices doublement stochastiques. Le problème d'affectation peut se mettre sous la forme du second problème soulevé dans le théorème de dualité (cf. [4], chap. 8) où il y a lieu de trouver un vecteur $y = (y_1, \dots, y_r)$ qui maximise $y \cdot b^t$ sous les contraintes $y \cdot A \leq c$,

$y \geq 0$; où $A = (a_{ij})$ est une matrice donnée $r \times s$, $b = (b_1, \dots, b_r)$ et $c = (c_1, \dots, c_s)$.

2. EXEMPLE D'APPLICATION

Reprenons le tableau du paragraphe II.2.3.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	86	48	60	66	4
e_2	10	6	2	2	38
e_3	21	7	9	3	31
e_4	2	24	4	14	68
e_5	1	19	5	7	67

La valeur initiale du vecteur w est

$$w^0 = (4, 2, 3, 2, 1 ; 0, 0, 0, 0, 0)$$

Les différents ensembles S_i correspondants sont

$$S_1 = \{a_5\}, S_2 = \{a_3, a_4\}, S_3 = \{a_4\}, S_4 = \{a_1\}, S_5 = \{a_1\} ;$$

la famille des ensembles S_i n'a pas de SDR, la condition C est violée pour $K = \{4, 5\}$ auquel on associe $a = \{1\}$. Pour déterminer λ considérons alors les vecteurs à 5 composantes

$$(u_4 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (2, 2, 2, 2, 2)$$

$$(u_5 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

on trouve

$$\lambda = \alpha_{43} = (u_4 + v_3) = 2$$

La nouvelle valeur du vecteur w est

$$w^1 = (4, 2, 3, 4, 3 ; -2, 0, 0, 0, 0)$$

Les différents ensembles S_i correspondants sont

$$S_1 = \{a_5\}, S_2 = \{a_3, a_4\}, S_3 = \{a_4\}, S_4 = \{a_1, a_3\}, S_5 = \{a_1\} ;$$

une telle famille d'ensembles n'a pas de SDR, la condition C est violée pour $K = \{2, 3, 4, 5\}$ auquel on associe $J = \{1, 3, 4\}$.

La valeur de λ se détermine à partir des vecteurs suivants

$$(u_2 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (0, 2, 2, 2, 2)$$

$$(u_3 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (1, 3, 3, 3, 3)$$

$$(u_4 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (2, 4, 4, 4, 4)$$

$$(u_5 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (1, 3, 3, 3, 3)$$

On trouve

$$\lambda = \alpha_{53} - (u_5 + v_3) = 2$$

d'où la nouvelle valeur du vecteur w

$$w^2 = (4, 4, 5, 6, 5 ; -4, 0, -2, -2, 0)$$

auquel correspondent

$$S_1 = \{a_5\}, S_2 = \{a_3, a_4\}, S_3 = \{a_4\}, S_4 = \{a_1, a_3\}, S_5 = \{a_1\} ;$$

on se retrouve dans la même situation que ci-dessus avec la condition C violée pour $K = \{2, 3, 4, 5\}$ et $\lambda = \{1, 3, 4\}$; considérons pour déterminer un nouveau J à partir de w^2 , les vecteurs suivants

$$(u_2 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (0, 4, 2, 2, 4)$$

$$(u_3 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (1, 5, 3, 3, 5)$$

$$(u_4 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (2, 6, 4, 4, 6)$$

$$(u_5 + v_j / 1 \leq j \leq 5) = (1, 5, 3, 3, 5)$$

On trouve

$$\lambda = 2 ;$$

d'où

$$w^3 = (4, 6, 7, 8, 7 ; -6, 0, -4, -4, 0)$$

auquel correspondent

$$S_1 = \{a_5\}, S_2 = \{a_2, a_3, a_4\}, S_3 = \{a_2, a_4\}, S_4 = \{a_1, a_3\}, S_5 = \{a_1\} ;$$

cette famille d'ensembles a deux SDR

$$(a_5, a_2, a_4, a_3, a_1) \text{ et } (a_5, a_4, a_2, a_3, a_1)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. BENZECRI, *Analyse factorielle des proximités* ; I et II, Publ. de l'Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris, XIII et XIV, 1964-1965.
- [2] I.C. LERMAN, *Les bases de la classification automatique* ; Gauthier-Villars, "collection programmation", Paris, 1970 .
- [3] I.C. LERMAN, *Etude distributionnelle de statistiques de proximité entre structures finies de même type ; application à la classification automatique* ; Cahiers du B.U.R.O. n°19, Paris, 1973 .
- [4] Jr. MARSHALL HALL, *Combinatorial Theory* ; Ginn/Blaisdell, 1967 .
- [5] R.N. SHEPARD, *The analysis of proximities : multidimensional scaling with an un known distance function*, Psychometrika, vol. 27 (1962) .
- [6] J.C. SIMON, A.CHECROUN et C.ROCHE, *Reconnaissance des formes. Comparaison des formes indépendantes des déplacements, homothéties et petites déformations*, note aux C.R. Acad. Sc. Paris (15 Juin 1970). Publié en Anglais dans "Pattern Recognition", vol. 4, Nr 1, Janvier 1972.
- [7] A. CHECROUN, *Traitement et reconnaissance des formes par un ordinateur. Application à la cartographie électromagnétique*. Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, Institut de Programmation, 4 Mars 1972.

- [8] A. WALD, J. WOLFOWITZ, *Statistical tests based on permutations of the observations*, Ann. Math. Stat., vol. 15 (1944). Cette étude développée peut être consultée dans l'ouvrage de Madan Lal Puri et Pranab Kumar Sen, *Non parametric methods in multivariate analysis*, John Wiley (1971), chap. 3.
- [9] S.H. UNGER, *A heuristic program for testing pairs of directed line graphs for isomorphism*, Communications ACM, vol. 7, n°1, pp. 26-34, 1964.
- [10] J.P. STEEN, *Principe d'un algorithme de recherche d'un isomorphisme entre deux graphes* ; R.I.R.O. Série R-3, pp. 51-69, 1969.
- [11] P.H.A. SNEATH, R. SOKAL, *Numerical Taxonomy*, Freeman, San Francisco and London, (1972).